وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

Livre de l'élève

Mathématiques Pures

Calcul différentiel et intégral

2016-2017

Troisième secondaire

Livre de l'élève

Mathématiques

Pures

Calcul différentiel et intégral

Troisième secondaire

2016-2017

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

Nom : ....

Classe : ....

Ecole : ....

Auteurs

Mr. Kamal Younis Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

Mr. Cerafiem Elias Skander

First eddition 2016 / 2017

Deposit number 8703 / 2016

I.S.B.N 8 - 031- 706 - 977 - 978

Introduction

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

يشهد عالم اليوم تطورًا علميًّا مستمرًا ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقًا من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « التفاضل والتكامل» للصف الثالث الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى الكتاب « التفاضل والتكامل » مايلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخططٌ تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضِّح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدِّم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة، يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة، وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى، يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة، تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

Sommaire

Unité 1 — Differentiation et ses Applications

1 - 1 Dérivation des fonctions trigonométriques 4

1 - 2 Dérivation implicite et paramétrique 9

1 - 3 Dérivation successive 14

1 - 4 Équations de la tangente et de la normale à une Courbe 18

1 - 5 Dérivation de fonctions liées au temps 22

Résumé de l'unité 29

Exercices généraux 30

Epreuve cumulative 33

Unité 2 — Dérivation et Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

2 - 1 fonction exponentielle et fonction logarithmique 36

2 - 2 Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques 41

2 - 3 Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques 50

Résumé de l'unité 56

Exercices généraux 57

Epreuve cumulative 59

Unité 3
Comportement d'une fonction et tracé de la courbe

3 - 1 Croissance et décroissance des fonctions. 62

3 - 2 Valeurs maximales et minimales. 66

3 - 3 Tracé de la courbe. 72

3 - 4 Applications sur les valeurs maximales et minimales. 82

Résumé de l'unité 88

Exercices généraux 90

Epreuve cumulative 93

Unité 4
Intégral finie et ses applications

4 - 1 Les méthodes d'intégrations 96

4 - 2 Intégrations de Fonctions trigonométriques 106

4 - 3 Intégrale finie 110

4 - 4 Les aires dans le plan 117

4 - 5 Volume de solides de révolution 125

Résumé de l'unité 132

Exercices généraux 134

Epreuve cumulative 136

Epreuves générales 138

Réponses de quelques exercices 150

Unité 1

Differentiation et ses Applications

Introduction de l'unité

Dans vos études précédentes de fonctions , vous avez étudié les fonctions explicites d'une variable sous la forme y = f (x) , des opérations sur les fonctions et leur composé. Vous avez déjà étudié la dérivabilité de la fonction continue sur un ensemble de définition. Vous pouvez déterminer la dérivée première des fonctions algébriques et des fonctions trigonométriques.

Dans cette unité,on continue les études des la dérivation des fonctions trigonométriques et des fonctions dont on ne peut pas séparer ses variables car les variables reliant par une relation implicite ou par un paramètre. Ce qui nécessite l'étude d'autre méthode de la dérivation comme la dérivation implicite et la dérivation paramétrique qui dépend en chêne. On chérche aussi la dérivée de la fonction dérivée (la dérivée séconde) à l'étude de la dérivation sucséssive qui nous pérmet d'étudier plusieurs applications de la vie.

Dans cette unité on s'interesse des applications importentes de la dérivée dans plusieurs domaines, sportif, phisique, économique, biologique, de l'étude des équations de la tangente et de la normale de la courbe et la dérivation liée au temps qui nous aident a symboliser et résoudre les problèmes.

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de:

- Déterminer la dérivées des fonctions trigonométriques sec x , cosec x , cotg x
- Déterminer la dérivée des fonctions(explicite – implicite – paramètrique)
- Déterminer la dérivée sucséssives (première et deuxième) de déffirentes fonctions et comment les représenter.
- Déterminer les équation de la tangente et de la normale d'une courbe en l'un de ses points
- Déterminer la dérivée liée au temps(le taux) et ses applications phisiques
- Symboliser les problémes de la vie et économiques

Vocabulaires de base

- Dérivation
- Dérivée première
- Fonction trigonométrique
- Fonction explicite
- Fonction implicite
- intermédiaire (Paramètre)
- Dérivation implicite
- Dérivation paramètrique
- Dérivées succéssives
- Coefficient directeur (pente) de la tangente
- Equation de la tangente
- Equation de la normale
- Taux
- Taux liés

Aides pédagogiques

- Calculatrice graphique
- Ordinateur avec des logiciels de graphisme

Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Dérivation des fonctions trigonométriques

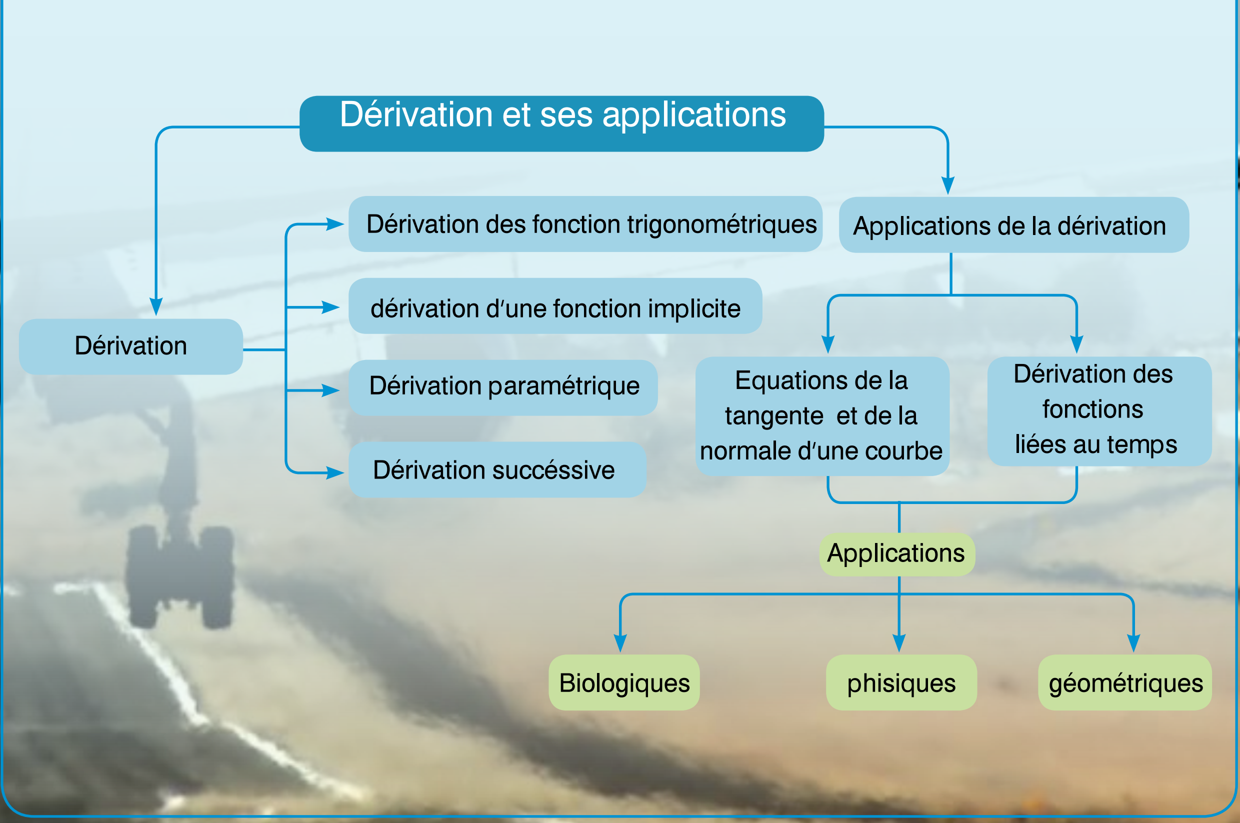
Leçon (1 - 2): Dérivation d'une fonction implicite ou paramétrique

Leçon (1 - 3): Dérivation succéssive d'une fonction

Leçon (1 - 4): Equations de la tangente et de la normale d'une courbe

Leçon (1 - 5): Dérivation des fonctions liées au temps

Organigramme de l'unité



1 - 1 Dérivation des fonctions trigonométriques

Apprendre

Déterminer la dérivée :

- f(x) = cotg x
- f(x) = sec x
- f(x) = cosec x

Vocabulaires

- Fonction trigonométrique
- Dérivée
- cotg x
- sec x
- cosec x

Aides pédagogiques

- *Calculatrice scientifique*
- *Logiciels graphiques*

f(x)	f'(x)
a (a∈ R)	Zero
x^n (n ∈ R)	$n\,x^{n-1}$
sin x (x^{rad})	cos x
cos x (x^{rad})	- sin x
tan x (x^{rad})	$\sec^2 x$

Avant – propos:

Vous avez déjà étudié la dérivation de quelques fonctions trigonométriques. Dans cette leçon, on fait rappeler des notions de base pour savoir la dérivation d'autres fonctions tigonométriques.

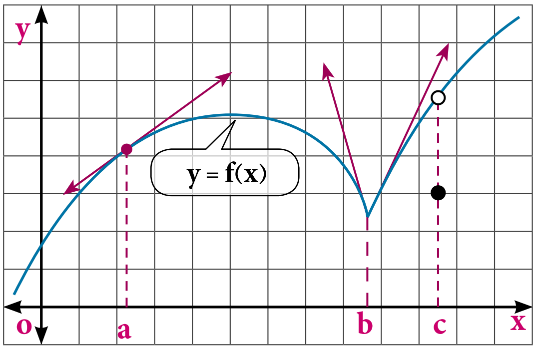
Réfléchissez et discutez

Vous savez que le taux de variation de la fonction f au point (a ; f(a)) $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tel que la limite existe et c'est aussi la première dérivée de f au même point qui est noté f '(x) et aussi la pente de la tangent à la courbe de f au point (a, f(a)) = f' (a)

De la figure ci – contre : discutez la dérivabilité de la fonction f en :

x = c ; x = a ; x = b

x ∈]a ; b[, x ∈ [a ; b]



Remarquez que :

La pente de la tangente est définie en tout point de la courbe sauf en x = b ; x = c, alors

1- La fonction f n'est pas continue en x = c, alors elle n'est pas dérivable en c.

2- La fonction f est dérivable en x = a, parce que f' (a) existe

3- La fonction f n'est pas dérivable en x = b, parce que la dérivée à droite $f'(b^+) \neq$ la dérivée à gauche $f'(b^-)$

4- La fonction f est dérivable sur l'intervalle] a ; b [si la dérivée de la fonction en tout point de l'intervalle existe.

5- La fonction f qui est définie sur l'intervalle [a ; b] est dérivable sur cet intervalle si et seulement si $f'(a^+)$ et $f'(b^-)$ existent et la fonction est dérivable sur l'intervalle ouvert] a ; b [

Rappel : règle de la dérivation

1- $\dfrac{d}{dx}[a\,f(x)] = a\,f'(x)$, a ∈ R

2- $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

3- $\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

4- $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

Si y = f (z) est dérivable par rapport à z, z = g (x) est dérivable par rapport à x ,

alors y = f [g (x)] est dérivable par rapport à x

et : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$ **[Dérivation en chaîne]**

c-a-d : $\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Si f est une fonction dérivable par rapport à x, n est un nombre réel ,

alors: $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$

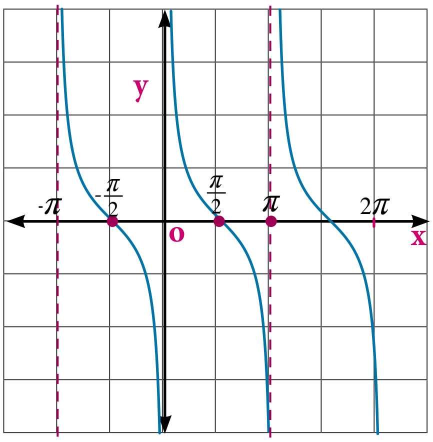
Si y = f(x), **alors** $\frac{d}{dx}(y)^n = n\, y^{n-1} \frac{dy}{dx}$

Apprendre

1 - La dérivée de la fonction cotangente

Si y = cotg x où $x \in R$, $x \neq n\pi$, $n \in z$

alors: $\frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cosec}^2 x$



y = cotg x

remarquez que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \frac{\sin x \times (-\sin x) - \cos x \times \cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -\text{cosec}^2 x$$

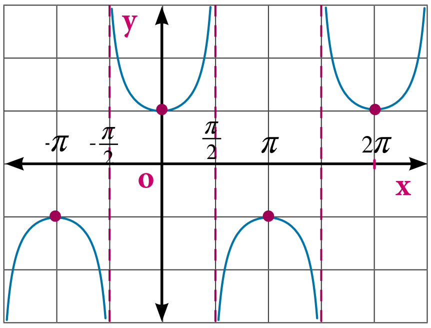
La dérivée de la fonction sécante

Si y = sec x où :

$x \in R$, $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in Z$

alors:

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ **(justifiez)**



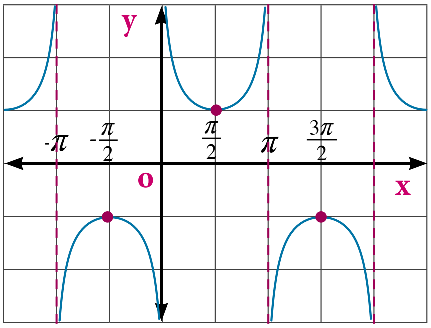
y = sec x

3- La dérivée de la fonction cosécante :

Si y = cosec x où

$x \in R$, $x \neq n\pi$, $n \in Z$

Alors : $\frac{d}{dx}$ (cosec x) = - cosec x cotg x **justifiez**



y = cosec x

Exemple

① Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = 3x^5 + 4 \text{ cotg } x$

b $y = 3 \sec x - 5 \tan x$

c $y = x^3 \text{ cosec } x$

d $y = \frac{1 - \text{cotg } x}{1 + \text{cotg } x}$

Solution

a $\frac{dy}{dx} = 3 \times 5x^4 + 4 (- \text{cosec}^2 x) = 15x^4 - 4 \text{ cosec}^2 x$

b $\frac{dy}{dx} = 3 (\sec x \tan x) - 5 \sec^2 x = \sec x [3 \tan x - 5 \sec x]$

c $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ cosec } x + x^3 (- \text{cosec } x \text{ cotg } x) = x^2 \text{ cosec } x [3 - x \text{ cotg } x]$

d $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \text{cotg } x)(\csc^2 x) - (1 - \text{cot} x)(-\csc^2 x)}{(1 + \text{cotg } x)^2}$

$= \frac{\csc^2 x [1 + \text{cotg } x + 1 - \text{cotg } x]}{(1 + \text{cotg } x)^2} = \frac{2 \text{ cosec}^2 x}{(1 + \text{cotg } x)^2}$

Essayez de résoudre

① Déterminez $\frac{dy}{dx}$, si y est égale à :

a $2 \sin x - 3 \text{ cotg } x$

b $\cos x + 4 \sec x$

c $\sec x \tan x$

d $\text{cosec } x \text{ cotg } x$

e $\frac{\sec x}{1 + \sec x}$

f $\frac{1 - \text{cosec } x}{1 + \text{cosec } x}$

Exemple

② Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = \sec (5x + 2)$

b $y = \text{cotg} (\cos 3x)$

c $y = \csc^2 (1 + 3x^2)$

d $y = (3 - 2 \text{ cotg } x)^3$

Solution

a $\because y = \sec(5x + 2)$ posons $z = 5x + 2$ $\therefore \frac{dz}{dx} = 5$

alors $y = \sec z$ où $\frac{dy}{dz} = \sec z \tan z$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$ **[règle de chaîne]**

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec z \tan z \times 5 = 5 \sec(5x + 2) \tan(5x + 2)$

Autre méthode

$\because \frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)] \times g'(x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec(5x + 2) \tan(5x + 2) \frac{d}{dx}(5x + 2)$

$= 5 \sec(5x + 2) \tan(5x + 2)$

b $y = \text{cotg}(\cos 3x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\csc^2(\cos 3x) \frac{d}{dx}(\cos 3x)$

$= -\text{cosec}^2(\cos 3x) \times [-\sin 3x \times 3] = 3 \sin 3x \csc^2(\cos 3x)$

c $y = \csc^2(1 + 3x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \text{ cosec}(1 + 3x^2) \times -\text{cosec}(1 + 3x^2) \text{ cotg}(1 + 3x^2) \times 6x$

$= -12x \text{ cotg}(1 + 3x^2) \csc^2(1 + 3x^2)$

d $y = (3 - 2 \text{ cotg } x)^3$

$\frac{dy}{dx} = 3(3 - 2 \text{ cotg } x)^2 \times -2(-\csc^2 x) = 6 \csc^2 x (3 - 2 \text{ cotg } x)^2$

Essayez de résoudre

(2) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si y est égale à :

a $\text{cotg}(x^2 + 3)$

b $\sec \sqrt{x - 2}$

c $\sin(\text{cosec } 3x^2)$

d $3 \sec 2x + 2 \text{ cosec } 3x$

e $-\text{cosec}^3(2x + \pi)$

f $x^2 \sec \frac{1}{x}$

Exercises 1 - 1

Si f ; g ; h sont trois fonctions dérivables par rapport à x , complètez ce qui suit: En utilisant les valeurs indiquées au tableau :

1. $h(x) = 3 f(x) - 2 g(x)$ alors $h'(1) =$ ....
2. $h(x) = f(x) [5 + g(x)]$ alors $h'(2) =$ ....
3. $h(x) = f(x) \div [g(x) + 2]$ alors $h'(1) =$ ....
4. $h(x) = f[g(x)]$ alors $h'(1) =$ ....
5. $h(x) = g[3x - f(x)]$ alors $h'(2) =$ ....
6. $h(x) = [x^3 + g(x)]^{-2}$ alors $h'(1) =$ ....

x	1	2
f(x)	- 1	4
g(x)	2	1
f '(x)	1	5
g'(x)	2	- 3

Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

7. $y = x^3 - 2 \sec x$
8. $y = \text{cosec}(2 - 3x)$
9. $y = \text{cotg}(\pi - \frac{1}{x})$
10. $y = \tan(\text{cotg } x)$
11. $y = (1 + \text{cotg } x)^2$
12. $y = \text{cosec}(\pi - 2x)$
13. $y = \cos 2x - 5 \text{ cotg } 3x$
14. $y = \tan 3x - \text{cosec } 2x$
15. $y = \sin^2 3x + \sec^2 x$.
16. $y = \sec x \tan 2x$
17. $y = \text{cotg } \sqrt[3]{x}$
18. $y = \csc^2(1 + x^2)$
19. $y = 3\sec^2(2x + \pi)$
20. $y = \sqrt{1 + \text{cosec } x}$
21. $y = x^2 \text{ cotg } 3x$
22. $y = (\text{cosec } x + \text{cotg } x)^{-1}$
23. $y = \frac{\text{cotg } 3x}{2x + 3}$
24. $y = \frac{1 - \sec x}{1 + \sec x}$

Répondez aux questions suivantes :

25. Si $y = \text{cotg } \frac{\pi}{6} z$, $z = 3\sqrt{x}$ trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$
26. Si $y = \sqrt{5 - 2z}$, $z = \sec 2x$ Démontrez que $\sqrt{3} \frac{dy}{dx} + 12 = 0$ en $x = \frac{\pi}{6}$
27. Déterminez la pente de la tangente à la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ dans tout ce qui suit:
    - **a** $y = 2 \text{ cotg } x + \sqrt{2} \sec x$ en $x = \frac{\pi}{4}$
    - **b** $y = 3 \tan x - \csc^2 x$ en $x = \frac{3\pi}{4}$

Dérivation implicite et paramétrique

1 - 2

Dérivation implicite

On a déjà trouvé la dérivé d'une fonction sous la forme y = f (x) et c'est une fonction explicite de la variable indépendante x où on détermine la valeur de y selon la valeur de x par exemple :

$y = 4x^3 - 5x + 2$ et alors $y' = 12x^2 - 5$

mais, si la relation entre y et la variable x est une relation de x et y à la fois par exemple :

$x y + y - 4 = 0$ (1) $\qquad x^2 + y^2 - 9 = 0$ (2)

alors chacune des deux équations représente une relation implicite entre x et y et décrit les coordonnées du point (x ; y) de la courbe .

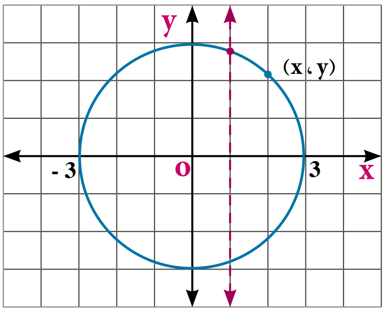
Remarquez que :

1- On peut écrire l'équation $x y + y - 4 = 0$ sous la forme :

$y (x + 1) = 4 \qquad \therefore \; y = \frac{4}{x+1}$ où $x \neq -1$

Dans ce cas, la relation est représentée par une fonction explicite .

2- L'ensemble des points (x ; y) qui vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 9$, représente un cercle dont le centre est l'origine et de rayon 3 unités. Du graphique, on remarque que la relation $x^2 + y^2 = 9$ n'est pas une fonction.

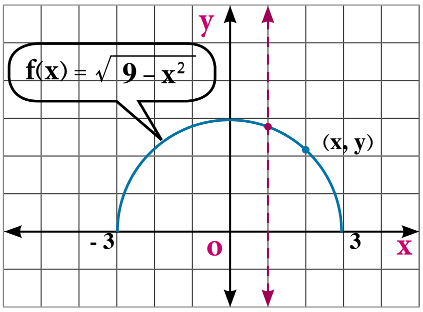


On peut calculer $y^2 = 9 - x^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

Alors on peut définir la relation $x^2 + y^2 = 9$ par deux fonctions explicites la première $y = \sqrt{9 - x^2}$

dont l'ensemble de définition est [-3 , 3] ; l'ensemble image est [0 , 3] et dérivable pour tout $x \in \,]-3 , 3[$



Apprendre

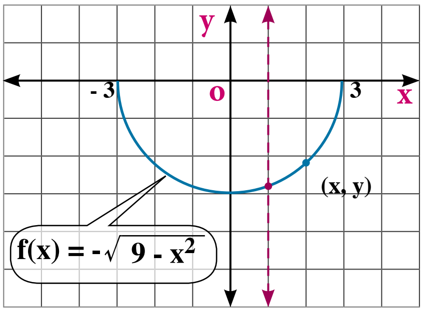
- Dérivation implicite
- Dérivation paramétrique

Vocabulaires de base

- Relation
- Fonction explicite
- Fonction implicite
- Paramètre

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique



La deuxième $y = -\sqrt{9 - x^2}$
dont l'ensemble de définition est [-3, 3]; l'ensemble image est [-3; 0] et dérivable pour tout x∈]-3 , 3[
dans la plus par des équations sous forme f(x ; y) =0, on ne peut pas déterminer y en fonction de x directement car y n'est pas une fonction explicite, mais on peut appeler cette fonction par fonction implicite.
Pour dériver une fonction implicite, on dérive les deux membres de l'équation en respectant la règle de la dérivation en chaîne pour obtenir $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$.

Exemple

1 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si:

a $x^3 + y^2 - 7x + 5y = 8$

b $3xy + y^2 = x^2 - 7$

Solution

a On remarque que l'équation ne représente pas y directement en fonction de x. Pour trouver $\frac{dy}{dx}$, on dérive les deux membres par rapport à x sachant que y est une fonction de x et dérivable:

$$3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} - 7 + 5\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 5) = 7 - 3x^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{7 - 3x^2}{2y + 5}$$

Rappel

Si y est une fonction en x et dérivable alors:

$$\frac{d}{dx}(y)^n = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

b $\because 3xy + y^2 = x^2 - 7$ on dérive les deux membres par rapport à x.

$$\therefore \frac{d}{dx}(3xy) + 2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$3x\frac{dy}{dx} + y \times 3 + 2y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}[3x + 2y] = 2x - 3y \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{3x + 2y}$$

Essayez de résoudre

1 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ si:

a $x^3 - 5xy + y^3 = 4x$

b $x^2 y + y^2 x = 25$

Exemple

2 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si:

a $\sin 2y = y \cos 3x$

b $\tan 2x + \cot g\, y = xy$

Solution

a On dérive les deux membres de l'équation par rapport à x

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin 2y) = \frac{d}{dx}(y \cos 3x)$$

$$\cos 2y \times 2\frac{dy}{dx} = y[-\sin 3x \times 3] + \cos 3x\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}[2\cos 2y - \cos 3x] = -3y\sin 3x \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3y\sin 3x}{\cos 3x - 2\cos 2y}$$

b On dérive les deux membres de l'équation par rapport à x

$$\frac{d}{dx}(\tan 2x) + \frac{d}{dx}(\text{cotg } y) = \frac{d}{dx}(xy)$$

$$2\sec^2 2x - \csc^2 y\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$\frac{dy}{dx}[x + \csc^2 y] = 2\sec^2 2x - y \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 2x - y}{x + \csc^2 y}$$

Essayez de résoudre

2 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si:

a $x\cos y + y\cos x = 1$ **b** $3y = \sin x \cos 2y$

Remarque : La forme finale de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ à la dérivation implicite contient x et y. Pour cela, on trouve des difficultés pour calculer la dérivée pour une valeur de x car on a besoin aussi de la valeur correspondante de y qui est aussi difficile de la déterminer de la relation initiale.

Dérivation Paramétrique

Si on représente l'abscisse et l'ordonnée du point (x ; y) comme une fonction en troisième variable t (qui est appelée paramètre) par les deux équations :
x = f(t) et y = g(t) où f et g ont le même ensemble de définition.
Alors les deux équations paramétriques représentent une équation d'une courbe

Apprendre

De la courbe définie sous la forme paramétrique x = f(t) , y = g(t)

On a $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$ où f et g sont deux fonctions dérivables par rapport à t

Exemple

3 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ des courbes suivantes aux points donnés :

a $x = 5t + 3,\ y = 16t^2 + 9,\quad t = 5$ **b** $x = 3\cos 2\theta,\ y = 4\sin 3\theta,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

Solution

a $x = 5t + 3 \qquad \frac{dx}{dt} = 5, \qquad y = 16t^2 + 9 \qquad \frac{dy}{dt} = 32t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{32t}{5} \qquad \text{et} \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=5} = 32$$

b $x = 3\cos 2\theta \qquad \frac{dx}{d\theta} = 3 \times -\sin 2\theta \times 2 = -6\sin 2\theta$

$y = 4\sin 3\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = 4 \times \cos 3\theta \times 3 = 12\cos 3\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{12\cos 3\theta}{-6\sin 2\theta} = \frac{-2\cos 3\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\text{en } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{alors} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = -2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Essayez de résoudre

3 Trouvez $\frac{dy}{dx}$ des courbes suivantes aux point donnés

a $x = (t + 7)(t - 2) \quad , \quad y = (t^2 + 1)(t - 2) \quad , \quad t = 1$.

b $x = \sec^2\theta - 1 \; , \quad y = \tan\theta \; , \quad \theta = \frac{-3\pi}{4}$ **c** $x = \sqrt{3t - 2} \; , \quad y = \sqrt{4t + 1} \; , \quad t = 2$

Réflexion critique : Trouvez la valeur paramétrique z à laquelle la courbe $x = 2z^3 - 5z^2 - 4z + 12 \quad , \quad y = 2z^2 + z - 4$ admet une tangente horizontale et une autre verticale.

Exemple

4 Déterminez la dérivée de $(4x^3 - 9x^2 + 5)$ par rapport à $(3x^2 + 7)$

Solution

Posons $y = 4x^3 - 9x^2 + 5 , \quad z = 3x^2 + 7$ alors $y = f(x)$, $\qquad z = g(x)$

Les deux fonctions f ; g sont dérivables par rapport à x sachant que x est un paramètre pour chacune des deux variables y et z

$\therefore$ de la dérivation paramétrique on trouve que :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y'}{z'} = \frac{12x^2 - 18x}{6x} = 2x - 3 \qquad \textbf{c-a-d.} \quad \frac{d}{d(3x^2 + 7)}[4x^3 - 9x^2 + 5] = 2x - 3$$

Essayez de résoudre

4 En utilisant la dérivation paramétrique, trouvez :

a la dérivée de $x^2 + 1$ par rapport à $\sqrt{x^2 - 1}$

b la dérivée de $\sqrt{8 + x^2}$ par rapport à $\frac{x}{x + 1}$ en $x = 1$

c la dérivée de $x - \sin x$ par rapport à $1 - \cos x$ en $x = \frac{\pi}{3}$

Exercises 1 - 2

Premièrement : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) Si $x^2 + y^2 = 1$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) x b) $\frac{1}{y}$ c) $-\frac{x}{y}$ d) $-\frac{y}{x}$

2) Si $x^2 + y^2 = 2xy$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

3) Si $y^2 - 2\sqrt{x} = 0$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) $\frac{2y}{\sqrt{x}}$ b) $\sqrt{x}$ c) $\frac{x}{y^2}$ d) $\frac{1}{y^3}$

4) Si $x = 2t^2 + 3$, $y = \sqrt{t^3}$, $n = 1$, alors $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 2 d) 6

5) La pente de la tangente à la courbe $x y^2 = 3$ au point $(3, 1)$ est égale à :

a) -3 b) $-\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

Deuxièmement : Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

6) $x^2 - 4y^2 + 7 = 0$
7) $x^4 + 3y^4 - 2 = 0$
8) $x^2 - 2xy = 5 - y^2$
9) $x^3 + 6xy = 4y + 3$
10) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$
11) $xy + \sin y = 5$
12) $x \sin y + y \cos x = 0$
13) $x \operatorname{cosec} y = y \operatorname{cotg} x$
14) $x^2 \sin y - y^2 \sin x = 9$
15) $\sin 2x \cos 2y = \frac{3}{4}$

Troisièmement : Déterminez $\frac{dy}{dx}$ des courbes suivantes aux points donnés :

16) $x = 13 - 2t$, $y = 4t^2 - \sqrt{t}$, $t = 4$

17) $x = \sin 2\pi\theta$, $y = \cos 2\pi\theta$, $\theta = \frac{1}{6}$

18) $x = 5 + \sec^2 3\theta$, $y = 1 - \tan 3\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

19) Déterminez la pente de la tangente à la courbe $\sqrt{\pi y} = 3x + 1$ au point $(-\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4})$

20) Déterminez la dérivée de $\frac{x+1}{x-1}$ par rapport à $\sqrt{2x+1}$ en $x = 4$

21) Déterminez la valeur du paramètre t à laquelle la courbe $x = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 9$, $y = 2t^2 + n - 5$ admet:

a) une tangente verticale b) une tangente horizontale.

1 - 3 Dérivation successive

Apprendre

- *Déterminer les Dérivées successives de la fonction*

Vocabulaires

- *Ordre*
- *Dérivée*

Aides pédagogiques

- *Calculatrice scientifique*

Réfléchissez et discutez

Si $y = f(x)$ où $y = x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ déterminez la dérivée de la fonction f.
Pouvez – vous répéter la dérivation par rapport à x ? Pourquoi ?
La dérivation est –elle finie ? Justifiez votre réponse.

Apprendre

Dérivées successives

- **Si** $y = f(x)$ où f est une fonction dérivable par rapport à x, alors sa première dérivée est $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ et représente une nouvelle fonction .
- **Si** la première dérivée est dérivable par rapport à x, alors sa dérivée est $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et est appelée la dérivée seconde de la fonction f et représente une autre fonction noté $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$
- **Si** on répète la dérivation, on obtient la troisième dérivée de la fonction f et noté $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

Les dérivées à partir de la deuxième sont appelées les dérivées successives et la nième dérivée noté comme ce qui suit :

$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ où n est un nombre entier positif

On remarque que :

1- $\frac{d^2y}{dx^2}$ se lit la seconde dérivée de y par rapport à x

2- Il ya une différence entre $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, La premier est la seconde dérivée et la deuxième est le carré de la première dérivée.

Exemple

(1) Déterminez la seconde dérivée dans ce qui suit:

a $y = 2x^4 + 3x - 5$ **b** $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

c $y = \sin(3x - 2)$ **d** $y = \sqrt{3x - 2}$

Solution

a $\because y = 2x^4 + 3x - 5,\ x \in R$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 8x^3 + 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2$

b $\because y = \frac{x+1}{x-1},\ x \neq 1$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2},\ x \neq 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[-2(x-1)^{-2}] = \frac{4}{(x-1)^3},\ x \neq 1$$

c $\because y = \sin(3x - 2),\ x \in R$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 3\cos(3x - 2),\ \frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin(3x - 2)$

d $\because y = \sqrt{3x - 2},\ x \geqslant \frac{2}{3}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}},\ x > \frac{2}{3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{9}{4\sqrt{(3x-2)^3}},\ x > \frac{2}{3}$$

Essayez de résoudre

1) Déterminez la troisième dérivée dans ce qui suit:

a $y = x^4 - 2x^2 + 5$ **b** $z = (2n - 1)^4$

c $f(x) = \cos(2x + \pi)$ **d** $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

Réflexion critique: Si $y = \sin ax$, découvriez le modèle de la dérivation successive puis trouvez $y^{(25)}$

Exemple

2) Si $y^2 + 2xy = 8$, démontrez que : $(x + y)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \text{zero}$

Solution

a $\because y^2 + 2xy = 8$, **on dérive les deux membres par rapport à x**

$\therefore 2y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ **on divise par 2**

Shorouk Press 2016 - 2017

$(x + y)\frac{dy}{dx} + y = 0$ **on dérive les deux membres par rapport à x**

$$\therefore (x + y)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{alors } (x + y)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Essayez de résoudre

2) **a** Si $x^2 + y^2 = 9$, **Démontrez que** : $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

b Si $y = \tan x$, **Démontrez que** : $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1 + y^2)$

Équations paramétriques :

Exemple

(3) Si $x = 2n^3 - 5$, $y = 6n^2 + 1$ trouvez $\frac{d^2y}{dx^2}$ en t = 1

Solution

On dérive chacun de x et y par rapport au paramètre t

$\therefore \frac{dx}{dn} = 6\,n^2$, $\frac{dy}{dn} = 12\,n$

$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{12n}{6n^2} = 2\,n^{-1}$, $n \neq 0$

alors $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,[\,2n^{-1}] = -\,2n^{-2} \times \frac{dn}{dx}$

$= \frac{-2}{n^2} \times \frac{1}{6n^2} = -\,\frac{1}{3n^4}$, $n \neq 0$

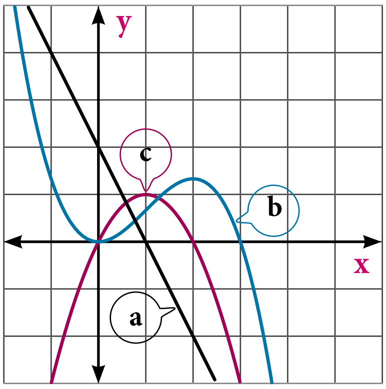
en n = 1 $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{1}{3}$

Essayez de résoudre

(3) Si $x = z^2 - 2z$, $y = z^2$

Déterminez $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ en z = 2

Réflexion critique : La figure ci-contre indique les représentations graphiques des f (x) ; f'(x) ; f'' (x) où f est une fonction polynôme. Déterminez la courbe représentative de chaque fonction.



Activité

En utilisant la logiciel geogebra ou autre logiciel, tracez les courbes représentatives des fonctions suivante et leurs première et deuxièmes dérivées puis inscrivez vos notes.

(a) $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 12$

(b) $g(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + 4$

Est – ce que vos notes et votre décision au réflexion critique sont convenables ?

Exercises 1 - 3

1. Si $y = ax^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ et le tableau suivant indique les valeurs correspondantes de x , y , y', y'' Déterminez les valeurs réelles de a ; b ; c ; d puis complétez le tableau .

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	8		28
2		75	34

Déterminez la troisième dérivée dans ce qui suit :

2. $y = x^5 - 4x^3 + 3$

3. $y = \dfrac{2\,x}{x + 1}$

4. $y = \sin(2\,x - 7)$

5. $y = \cos(\pi - 3\,x)$

6. $y = \sin x \cos x$

7. $y = \sqrt{2\,x - 5}$

Répondez aux questions suivantes :

8. Si $3x^2 + 5 = 2\,x\,y$, Démontrez que : $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 3$

9. Si $x^2 + y^2 = 4$, Démontrez que : $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4 = 0$

10. Si $y = 3\cos(2\,x + 1)$, Démontrez que : $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\,y = 0$

11. Si $x\,y = \sin x \cos x$, Démontrez que : $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 4\,x\,y = 0$

12. Si $y = x \sin x$, Démontrez que : $x\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} + 2\,y = 0$

13. Si $y = \sec x$, Démontrez que : $y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^2(3y^2 - 2)$

14. Si $\dfrac{dy}{dx} = 2\,x - 3$, $\dfrac{dz}{dx} = x^2 - 1$, Déterminez : $\dfrac{d^2y}{dz^2}$ en $x = 2$

15. Si $x = 3n^2 - 1$, $y = n^3 + 2$, Déterminez : $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en $n = 4$

16. Si $x = \dfrac{z + 1}{z - 1}$, $y = \dfrac{z - 1}{z + 1}$, Déterminez : $\dfrac{dy}{dx}$ en $z = 2$

17. Si $x = \sec z$, $\sqrt{y} = \tan z$, Démontrez que : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$

1 - 4 Équations de la tangente et de la normale à une courbe

Apprendre

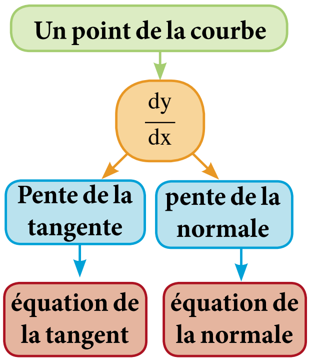
- *Déterminer l'équation de la tangente à un point d'une courbe*
- *Déterminer l'équation de la normale à un point d'une courbe*

Vocabulaires

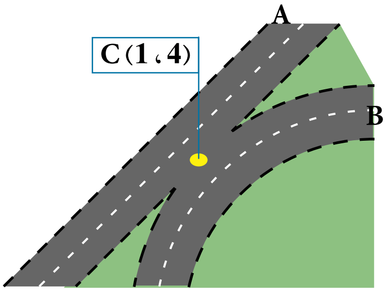
- *Pente de la tangente*
- *Pente de la normale*

Aides pédagogiques

- *Calculatrice scientifique*
- *logiciel graphique*



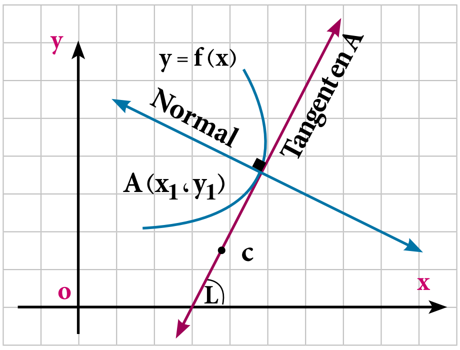
Réfléchissez et discutez



La figure ci-contre représente deux routes A et B, l'une est droite et l'autre sous la forme d'une courbe, touchées en situation C. Si la situation C est représentée par le point C (1 ; 4) dans un plan cartésien orthogonal. Si l'équation de la route B est :
$y = 2x^2 - 3x + 5$, pouvez – vous trouver l'équation de la route A ?
La route A passe – elle par le point (7 ; 10) ? vérifiez votre réponse.

Apprendre

courbe de la fonction f où y = f(x), m est la pente de la tangente à la courbe en ce point, alors :



1- l'équation de la tangente à la courbe au point (x_1 , y_1) est :
$y - y_1 = m (x - x_1)$

2- l'équation de la normale à la courbe au point (x_1, y_1)
est : $y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1)$

Exemple

fonctions trigonométriques

(1) Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe d'équation y = 2 x – cotg x au point de la courbe d'abscisse $\frac{\pi}{4}$

Solution

Pour déterminer un point de la courbe d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ on calcule l'ordonnée où

$y = 2x - \text{cotg } x \qquad \therefore\ y = \frac{2 \times \pi}{4} - \text{cotg } \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$

D'où le point appartient à la courbe $(\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} - 1)$

La pente de la tangente à un point quelconque

$= \frac{dy}{dx} = 2 - (-\text{cosec}^2 x) = 2 + \text{cosec}^2 x$

$\therefore$ au point $(\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} - 1)$:

La pente de la tangente = $2 + [\csc^2 \frac{\pi}{4}] = 4$, pente de la normale = $-\frac{1}{4}$

équation de la tangente : $y - (\frac{\pi}{2} - 1) = 4 (x - \frac{\pi}{4})$ **alors :** $y = 4x - \frac{\pi}{2} - 1$

équation de la normale : $y - (\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{-1}{4} (x - \frac{\pi}{4})$ **alors :** $y = -\frac{1}{4} x + \frac{9}{16}\pi - 1$

Essayez de résoudre

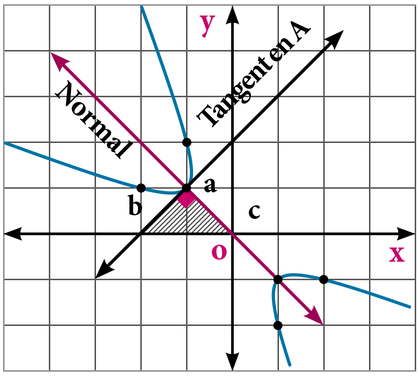
1) Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe $y = 3 - \sec x$ au point de la courbe d'abscisse $\frac{2\pi}{3}$

Exemple

Calcul d'aire

2) Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe $x^2 + 3x\,y + y^2 + 1 = 0$ au point A (- 1 ; 1), Si elles coupent l'axe des abscisses aux points B et C respectivement, calculez l'aire du triangle ABC par unités carrés

Solution



$\because$ $x^2 + 3x\,y + y^2 + 1 = 0$

Le point A (- 1 ; 1) vérifie l'équation de la courbe, alors il est situé à la courbe On dérive les deux membres de l'équation de la courbe par rapport à x, pour déterminer la pente de la tangente à la courbe en un point quelconque

$\therefore$ $2x + 3x \frac{dy}{dx} + 3y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

Au point A (- 1 , 1) $\therefore \frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore$ la pente de la tangente = 1 , la pente de la normale = - 1

L'équation de la tangente : $y - 1 = x + 1$ **d'où** $y = x + 2$

L'équation de la normale : $y - 1 = -(x + 1)$ **d'où** $y = -x$

en résolvant chacune des équations de la tangente et de la normale avec l'axe des abscisses $y = 0$; pour trouver les points d'intersection B et C.

$\therefore$ le point B (-2 ; 0) et le point C (0 ; 0) et on trouve que BC = 0 – (-2) = 2

L'aire du triangle ABC = $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ unité carré

Essayez de résoudre

2) Déterminez l'aire du triangle limitée par l'axe des abscisses, la tangente et la normale à la courbe $3x^2 + y^2 = 12$ au point (- 1 , 3)

Exemple Dérivation paramétrique

3 Soient $x = t^2 + 2$, $y = t^3 + 1$ les deux équations paramétriques de la courbe

Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe en $t = 1$

Solution

Pente de la tangente en tout point $= \frac{dy}{dx}$ où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2} t$$

en $t = 1$ la pente de la tangente $= \frac{3}{2}$ pente de la normale $= -\frac{2}{3}$

$\therefore\ x = (1)^2 + 2 = 3$, $y = (1)^3 + 1 = 2$

alors le point (3 ; 2) est situé à la courbe et en ce point :

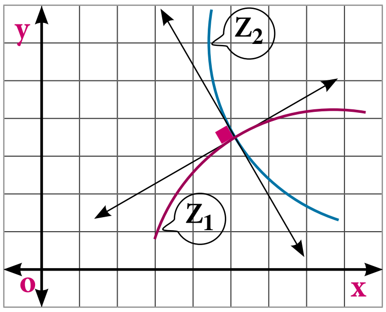
l'équation de la tangente : $(y - 2) = \frac{3}{2}(x - 3)$ **d'où** $3x - 2y - 5 = 0$

l'équation de la normale : $(y - 2) = -\frac{2}{3}(x - 3)$ **d'où** $2x + 3y - 12 = 0$

Essayez de résoudre

3 Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe $x = \cos\theta$, $y = \sqrt{2} + \sin\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

Réflexion critique : Si (1 ; 2) est l'un des points d'intersection de deux courbes : $y^2 - x^2 = 3$, $x\,y = 2$. Est – ce que les deux tangentes aux courbes en ce point sont perpendiculaires? vérifiez votre réponse.



Remarque importante : On dit que les deux courbes C_1 , C_2 se coupe perpendiculairement , si leurs tangentes au point d'intersection sont perpendiculaires.

Exercises 1 - 4

(1) Si f ; g ; h sont des fonctions dérivables par rapport à x. Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe de la fonction h dans ce qui suit , en utilisant les valeurs données par le tableau suivant :

(a) $h(x) = f(x) \times g(x)$, $x = 3$

(b) $h(x) = f(x) \div g(x)$, $x = 7$

(c) $h(x) = f[g(x)]$, $x = 3$

x	f(x)	g(x)	f' (x)	g' (x)
3	1	7	- 1	6
7	- 2	1	2	5

(2) Déterminez les équations de la tangente et de la normale à la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ aux valeurs données de x :

(a) $y = 3 - \cot g^2 x$, $x = \frac{\pi}{4}$

(b) $y = 2 \cos x - \sec x$, $x = \frac{\pi}{3}$

(3) Déterminez les équations de la tangente et de la normale aux courbes suivantes aux points donnés :

(a) $x^2 + y^2 = 52$ au point (4 , - 6)

(b) $x^2 + 5xy + y^2 = 7$ au point (- 1 , - 1)

(c) $y^2 (1 + x^2) = 8$ au point (- 1 , 2)

(d) $(\sin x + \cos x) y = \cos^2 x$ en $x = \frac{\pi}{2}$

(4) Déterminez les équations de la tangente et de la normale aux courbes suivantes aux valeurs données :

(a) $x = t^2 + 4t$, $y = 2t^2$ en $t = 1$

(b) $x = \sec\theta$, $y = \tan\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$

(5) Si le point (4 ; - 2) appartient à la courbe $x^2 + y^2 - 2kx + 12 = 0$, déterminez la valeur de k puis déterminez l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

(6) **Aire du triangle** : Déterminez l'aire du triangle limitée par l'axe des abscisses, la tangente et la normale à la courbe $x^2 + 4y^2 = 20$ au point (2 ; 2).

(7) **Orthogonalité de deux courbes** : Démontrez que les deux courbes $(x - 1)^2 + y^2 = 2$; $(x + 1)^2 + y^2 = 2$ se coupent perpendiculairement, puis déterminez les équations des leurs tangentes au point d'intersection.

1 - 5 Dérivation de fonctions liées au temps

Apprendre

- *Notion de la dérivation de fonctions liées au temps*
- *Méthodes pour résoudre les équation de la dérivation de fonctions liées au temps*
- *Symboliser et résoudre des problèmes de mathématiques et de physique de la vie*

Vocabulaires

- *taux*
- *Taux liés*

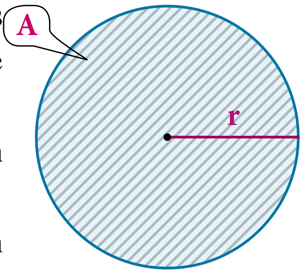
Aides pédagogiques

- *Calculatrice scientifique*
- *logiciel de graphisme*

Détermination les variable et les symbolise
↓
Faire un diagramme de données
↓
Trouver la relation
↓
Dérivat)ion de la relation par rapport au temps
↓
Remplacement par les valeurs pour déterminer le taux demandé

Réfléchissez et discutez

Quand une plaque métallique circulaire se mets sous l'effet d'une source de chaleur pendant une période de temps (t) secondes



- La longueur de son rayon (r) est – elle changée en fonction du temps (t) ?

- L'aire de la plaque (A) est – elle changée en fonction du temps (t) ?

- L'aire de la plaque (A) est – elle changée en fonction de la longueur du rayon (r) ? vérifiez votre réponse.

Remarques :

1 - Les deux variables (A) et (r) changent en fonction du temps (t) (fonction au temps) et sont liées par la relation

$A = \pi\, r^2$ d'où : $A = f(r)$

2 - En dérivant les deux membres de la relation précédente par rapport au temps, on obtient une nouvelle relation entre les dérivations lié au temps d'eux qui appelée l'équation de la dérivation lié au temps

où : $\frac{dA}{dt} = f'(r) \times \frac{dr}{dt}$

3 - Le taux est positif si la variable crois et négatif si la variable décrois en augmentant le temps.

Orale : quel taux est – il positif ?

(se dilater – se contracter – approcher – éloigner – verser - couler – se fondre- accumulation – diminuer – augmenter)

Exemple

gonfler un ballon

(1) Le taux d'augmentation du volume d'un ballon est $8\,\pi$ cm ^{3} / s, s'il remplie de gaz quand le rayon est 4 cm. Déterminez en ce moment:

(a) le taux d'augmentation du rayon.

(b) Le taux d'augmentation de l'aire de la surface.

Solution

Soient le volume du ballon (V), son rayon (r),et son aire (A) des fonctions dérivables par rapport à t.

a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ **(1)**

$\because \frac{dv}{dt} = 8\pi$ cm³/sec , r = 4cm par la substitution dans l'équation

$\therefore 8\pi = 4\pi(4)^2 \frac{dr}{dt}$ **alors** $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/sec

b $A = 4\pi r^2$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$\frac{dA}{dt} = 4\pi \times 2r \frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ **(2)**

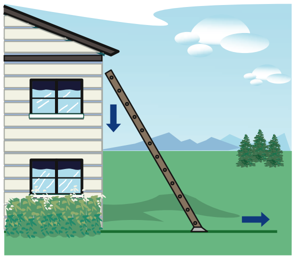
$\because \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/sec , r = 4 cm par la substitution dans l'équation

$\therefore \frac{dA}{dt} = 8\pi \times 4 \times \frac{1}{8} = 4\pi$ cm²/sec

Essayez de résoudre

1 **Le volume :** Un cube se dilate par la chaleur, Si le taux d'augmentation de son arête est 0,02 cm /s et le taux d'augmentation de son aire est 0,72 cm²/s pendant un moment quelconque. Déterminez la longueur de son arête en ce moment et le taux d'augmentation de son volume en ce moment .

Exemple **Mouvement de l'échelle**

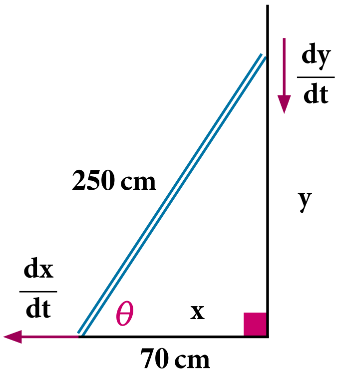


2 Une échelle de 250 cm de longueur s'appuie contre un mur vertical. L'extrémité supérieure de l'échelle se glisse avec un taux de 10 cm/s quand l'extrémité inférieure est à 70 cm du mur. Déterminez :

a Le taux d'éloignement de l'extrémité inférieure de l'échelle.

b Le taux de variation de l'angle entre l'échelle et le sol.

Solution



a Soient : y la distance entre l'extrémité supérieure de l'échelle et le sol, x est la distance entre l'extrémité inférieure de l'échelle et le mur,

Du théorème de Pythagore $x^2 + y^2 = (250)^2$ **(1)**

On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$ $\therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$ **(2)**

$\because$ L'extrémité supérieure se glisse vers le bas, alors y diminue

$\therefore \frac{dy}{dt} = -10$ cm /sec

En x = 70 cm et d'équation **(1)** on trouve que : y = 240 cm

par la substitution dans l'équation **(2)** on obtient : $\frac{dx}{dt} = -\frac{240}{70} \times -10 = \frac{240}{7}$ cm/sec

alors l'extrémité inférieure de l'échelle éloigné du mur avec un taux de $\frac{240}{7}$ cm /sec

b Soit θ la mesure de l'angle d'inclinaison de l'échelle au sol

$\sin\theta = \frac{y}{250}$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$\therefore \cos\theta \, \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250} \, \frac{dy}{dt}$ mais $\frac{dy}{dt} = -10$ cm/sec en x = 70 cm

$\frac{70}{250} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250} \times -10$ $\therefore \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{7}$ rad/sec

alors la mesure de l'angle diminue avec un taux de $\frac{1}{7}$ rad /s

Essayez de résoudre

(2) **Mouvement d'une échelle :** Une échelle repose par son extrémité inférieure à un sol horizontal et par son extrémité supérieure à un mur vertical. Si l'extrémité inférieure s'éloigne du mur avec un taux de 30 cm/s, déterminez le taux de glissement de l'extrémité supérieur quand la mesure de l'angle d'inclinaison de l'échelle au sole est égale à $\frac{\pi}{3}$

Réflexion critique : Une fusée de masse 15 tonnes est lancée, sachant que la taux d'échappement du carburant brûlé est constant et est égale à 200 kg/s, trouvez la masse de la fusée 30 secondes après le lancement

Remarque importante : Si $x_\circ$ est la valeur initiale de la variable x (en t = 0) , $\frac{dx}{dt}$ est le taux de variation de x par rapport au temps, x est la valeur de la variable après un temps t,

alors : $x = x_\circ + \frac{dx}{dt} \times t$

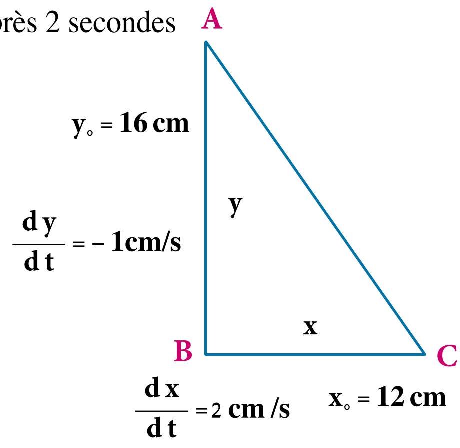
Dans le point de la réflexion critique, utilisez la relation $m = m_\circ + \frac{dm}{dt} \times t$ pour vérifier votre réponse.

Exemple **Aire**

(3) Les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont 12 cm et 16 cm. Si la longueur du premier côté augmente avec un taux de 2 cm /s et la longueur de l'autre diminue avec un taux de 1 cm / s.

a Déterminez le taux de variation de l'aire du triangle après 2 secondes

b Quand le triangle devient – il isocèle ?



Solution

a Soient x et y les longueurs des côtés du triangle après (t) secondes, x ; y ; A sont des fonctions au temps:

$\therefore$ x = 12 + 2 t , y = 16 - t

$A = \frac{1}{2} \, x \times y = \frac{1}{2} \, (12 + 2 n)(16 - t)$

$A = (6 + t)(16 - t)$

on dérive les deux membres par rapport au temps

$\therefore \frac{dA}{dt} = (6 + t) \times -1 + (16 - t) = 10 - 2t$ cm^2/s

En t = 2 s $\therefore$ Le taux de variation de l'aire du triangle = 10 - 2 (2) = 6 cm^2/s

b en $x = y$ on a $12 + t = 16 - t$ $\therefore\ t = \frac{4}{3}$ sec

alors après $\frac{4}{3}$ s , le triangle devient isocèle

Essayez de résoudre

3 **Volume:** Un corps métallique à la forme d'un parallélépipède rectangle de base carré. La longueur de la base augmente avec un taux de 1 cm/min et la hauteur diminue avec un taux de 2 cm / mn. Déterminez le taux d'augmentation de son volume quand la longueur du côté de la base est 5 cm et la longueur de la hauteur est 20 cm, dans combien de minutes le taux d'augmentation du volume du parallélépipède s'annule ?

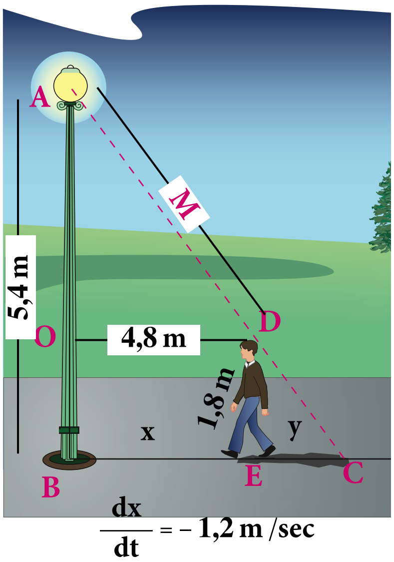
Exemple
Longueur de l'ombre

4 Un homme de 1,8 mètre de taille s'approche d'un poteau électrique avec un taux de 1,2 m/min. Si la hauteur de la lampe est 5,4 m de la terre, déterminez :

a Le taux de variation de la taille de l'homme.

b Le taux de variation de la distance entre la tête de l'homme et la lampe quand l'homme est à la distance de 4,8 m du poteau.

Solution



Symboliser le problème : Dans la figure ci – contre $\overline{AB}$ est le poteau, le point A est la lampe, $\overline{DE}$ est l'homme et le point C est l'extrémité de l'ombre de l'homme, alors :

$x = EB$ la distance de l'homme à la base du poteau .

$y = EC$ la longueur de l'ombre de l'homme.

$M = AD$ la distance entre la tête de l'homme et la lampe.

Premièrement : $\because \triangle ABC \triangle \sim DEC$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{5,4}{1,8} = \frac{x+y}{y}$$

alors $2y = x$ on dérive les deux membres par rapport au temps

$$\therefore 2\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{alors } \frac{dy}{dt} = \frac{-1,2}{2} = -0,6 \text{ mètre/s}$$

Deuxièmement : dans A D O rectangle en (O)

$M^2 = x^2 + (3,6)^2$ on dérive les deux membres par rapport au temps t

$2M\frac{dM}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$ at $x = 4,8$ A $f = 6$ m

$6\frac{dM}{dt} = 4,8 \times -1,2$ **c-a-d.** $\frac{dM}{Dt} = -0,96$ mètre/sec

Essayez de résoudre

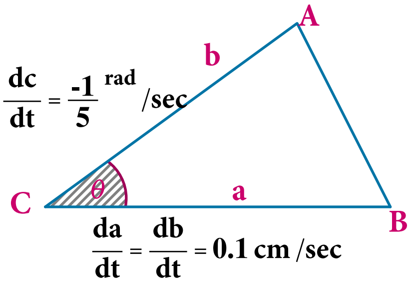
4 **Construction :** Un tuyau de l'eau d'extrémités A et B et de longueur 5 mètres, repose par l'extrémité A sur un sol horizontal et par un de ses points D sur un mur vertical de 3 mètres de longueur. Si l'extrémité A se glisse éloignement du mur avec un taux de $\frac{5}{4}$ m/min. Déterminez le taux d'abaissement de l'extrémité B quand l'extrémité A arrive au sommet du mur.

Exemple **Aire**

5 Deux côtés d'un triangle dont les longueurs augmentent avec un taux de 0,1 cm/s et la mesure de l'angle compris entre eux augmente avec un taux de $\frac{1}{5}$ rad/s. par quel taux l'aire du triangle varie-t- elle au moment où la longueur de chaque côté est 10 cm?

Solution

Symboliser le problème : posons que dans un moment t les longueurs des côtés du triangle sont a et b , la mesure de l'angle compris entre eux est θ rad , A est l'aire du triangle et sont tous des fonctions dérivables par rapport au temps t



Où $A = \frac{1}{2}$ a b $\sin\theta$ on dérive les deux membres par rapport à t

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} a\, b \frac{d}{dt}[\sin c] + \frac{1}{2}\sin\theta \frac{d}{dt}[a\, b]$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2} a\, b \cos c \frac{dc}{dt} + \frac{1}{2}\sin\theta[a \frac{db}{dt} + b \frac{da}{dt}] \qquad (1)$$

mais $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0{,}1$, $\frac{dc}{dt} = \frac{1}{5}$

Au moment au la longueur de chaque côté est 10 cm, le triangle est alors équilatérale

Alors $m(\angle\theta) = \frac{\pi}{3}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ par la substitution dans l'équation (1)

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}[2 \times 10 \times \frac{1}{10}]$$

$$= 5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 5{,}866 \text{ cm}^2 /s$$

Alors en ce moment l'aire du triangle augmente avec un taux de 5,866 cm^2 /sec

Essayez de résoudre

5 **Aire :** ABC est un triangle rectangle en C. Son aire est constante et est égale à 24 cm². Si le taux de variation de b est 1 cm / s, trouvez le taux de variation de a et de m $(\angle A)$ quand b est 8 cm.

Réflexion critique : Si x (est la mesure de l'angle en radians) augmente avec un taux constant, Expliquez pourquoi de?

a sinus et tangente cet angle augmente de même taux en $x = 0$

b tangente de cet angle augmente d'un taux de 8 fois du taux d'augmentation de sinus en $x = \frac{\pi}{3}$

c cosinus de cet angle diminue avec un taux de $\frac{3}{8}$ fois du taux d'augmentation de tangente en $x = \frac{\pi}{6}$

Exemple **lien à la physique**

6 Dans un circuit électrique fermé si V est Potentiomètres (en volte), I est l'intensité du courant (en Ampère), R est la résistance (en Ohm). Si le Potentiomètres augmente avec un taux de 1 volte/s, et la l'intensité du courant diminue avec un taux de $\frac{1}{2}$ Ampère/s , trouve le taux de la résistance quand V = 12 voltes et I = 2 Ampères .

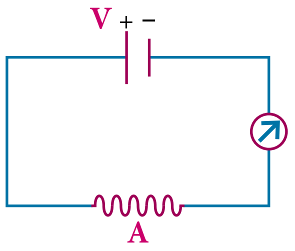
Solution

On sait que V = I × R   on dérive les deux membres par rapport à t

$\therefore \frac{dv}{dt} = I\frac{dR}{dt} + R\frac{dI}{dt}$

$\because \frac{dv}{dt} = 1$ volt / sec , $\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{2}$ Amperes /sec

$\therefore$ En v = 12 volts , I = 2 Amperes **alors:** $R = \frac{V}{I} = \frac{12}{2} = 6$ ohm



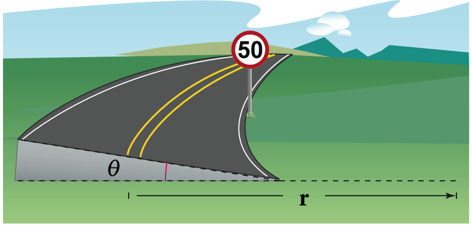
On aura $1 = 2 \times \frac{dR}{dt} + 6 \times -\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{dR}{dt} = 2$ ohm /sec

C'est-à-dire le taux de la résistance en ce moment est 2 ohm /s

Essayez de résoudre

6) Dans l'exemple précédent, calculez le taux de la résistance si l'intensité du courant augmente avec un taux de $\frac{1}{3}$ Ampère/s.

Activité



Construction des routes : Sur le Ring Road et les ponts, on évite l'effet de la force centrifuge sur le mouvement des voitures. On construit une route inclinée par un angle θ sur l'horizontal vers l'intérieur suivant la relation $g\, r \tan\theta = v^2$ où (g) est l'attraction de gravité, (v) est la vitesse de la voiture, (r) est la rayon du cercle de la courbe de la route. Déterminez l'équation qui lie le taux de variation de la vitesse de la voiture et le taux de variation de l'angle d'inclinaison de la route. Quelle conseille donnez-vous aux chauffeurs des voitures pour éviter l'effet de la force centrifuge

Exercises 1 - 5

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données :

1) Si le rayon d'un cercle augmente avec un taux de $\frac{4}{\pi}$ cm/s, alors le périmètre du cercle augmente en ce moment avec un taux de

a) $\frac{4}{\pi}$ cm/s   b) $\frac{\pi}{4}$ cm/s   c) $\frac{1}{8}$ cm/s   d) 8 cm/s

2) Un cube de glace se fond en conservant sa forme avec un taux de $1 cm^3$/s, alors au moment au son volume est $8 cm^3$, le taux de variation de son arête est .... cm / s

a) $-\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $-\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

3) Un corps se déplace sur la courbe de $y^2 = x^3$, si $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ unité / s en y = - 1 alors $\frac{dy}{dx}$ en ce moment est égale à .... unité / s

a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{2}$

4) Si la pente de la tangente de la courbe y = f(x) en un point quelconque = $\frac{1}{2}$ et l'abscisse de ce point diminue avec un taux de 3 unités / s, alors le taux de variation de son ordonnée est égal à .... unités / s

a) $-\frac{1}{6}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{2}$

Répondez aux questions suivantes :

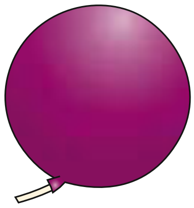
5) Un point se déplace sur la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$. Si le taux de variation de son abscisse par rapport au temps au point (3 ; 1) est égal à 4 unités/s, trouvez le taux de variation de son ordonnée par rapport au temps.

6) Une pierre tombe dans un lac calme qui fait des vagues circulaires. Si son rayon augmente avec un taux de 4 cm/s, déterminez le taux de variation de l'aire du vague à la fin de 5 secondes.

7) Une plaque à la forme d'un hexagone contracte à cause du frios. Si le taux de variation de son arête est 0,1 cm/s , déterminez le taux de variation de l'aire de la plaque, quand la longueur de son arête est 10 cm.

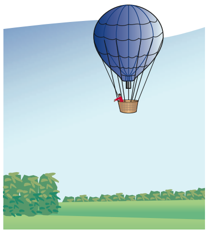
8) Une masse de gazes dont la température est constante. Le volume des gazes diminue avec un taux de 2 cm^3/s. Si la pression est inversement proportionnelle au volume et la pression est 1000 gp/cm^2 quand le volume est 250 cm^3. Déterminez le taux de variation du volume par rapport au temps quand le volume est 100 cm^3.

9) Le gaz s'échappe d'un ballon sphérique avec un taux de 20 cm^3/s. Déterminez le taux de variation du rayon du ballon au moment au le rayon est 10 cm, puis trouvez le taux de variation de l'aire extérieur du ballon au même moment.

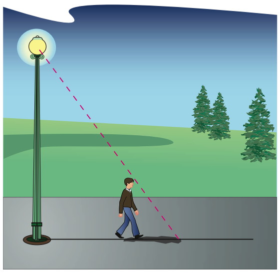


10) Une échelle de 5 m de longueur s'appuie contre un mur vertical, et se repose par l'extrémité inférieur sur un sol horizontal. L'extrémité inférieure de l'échelle s'éloigne du mur avec un taux de 4 cm/mn, quand l'extrémité supérieure est à 4 m du sol. Déterminez le taux de glissement de l'extrémité supérieur de l'échelle, puis déterminez le taux de variation de l'angle entre l'échelle et le sol en se moment.

11) Un ballon monte d'un point A de la terre et un dispositif de localisation se trouve au point B qui est à 200 m de A et de même niveau horizontal de A. Dans un moment l'appareil inscrit l'angle d'élévation du ballon qui était $\frac{\pi}{4}$, et il augmente avec un taux de 0,12 rad/mn. Déterminez le taux d'élévation du ballon en ce moment.



12) Un homme de 180 cm du taille s'éloigne de la base d'une lampe de 3 m de hauteur, avec un taux de 1,2 cm/s. déterminez le taux de variation de la longueur de l'ombre de l'homme. Si la droite passant par la tête de l'homme et la lampe est incliné à la terre par un angle de mesure θ^{rad} quand l'homme est à la distance de x m de la base de la lampe. Démontrez que $x = \frac{6}{5}$ cotg θ, puis déterminez le taux de variation de θ quand l'homme est à distance de 3,6m de la base de la lampe .



13) Un triangle isocèle dont la base est $20\sqrt{3}$ cm . Si chacun de deux côtés diminue avec un taux de 3 cm /h, Déterminez le taux diminution de son aire au moment à la longueur de chacun de deux côtés est égale à la longueur de sa base .

Résumé de l'unité

La dérivation des fonctions trigonométriques

Fonction		Dérivée
Fonction sinus	sin x	cos x
Fonction cosinus	cos x	- sin x
Fonction tangente	tan x	$\sec^2 x$
Fonction cotangente	cotg x	- cosec^2 x
Fonction sécante	sec x	sec x tan x
Fonction cosécante	cosec x	- cosec x cotg x

Dérivation implicite

Dans la dérivation de la relation implicite f(x ; y) = 0, on dérive les deux membres de la relation par rapport à l'un des deux variables suivant les règles de la dérivation en chêne pour obtenir $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$ respectivement .

Dérivation paramétrique

Si la courbe donnée est sous la forme paramétrique x = f(t) , y = g (t), alors $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$ où f et g sont dérivables par rapport à t

Dérivations successives

Si y= f(x) où f est une fonction dérivable par rapport à x, les dérivées à partir de la deuxième dérivée (s'ille existe) sont appelées les dérivées successives . On les note $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou y'' La troisième dérivée par $\frac{d^3y}{dx^3}$ ou y''' ed la $n^{iéme}$ dérivée par $\frac{d^n y}{dx^n}$ ou $y^{(n)}$ où n est un entier positif.

Equation de la tangente et de la nombre à une courbe

courbe de la fonction f où y = f(x), m est la pente de la tangente à la courbe en ce point, alors :

1- l'équation de la tangente à la courbe au point (x_1 , y_1) est : $y - y_1 = m (x - x_1)$

2- l'équation de la normale à la courbe au point (x_1, y_1) est : $y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1)$

Dérivation des fonction liées au temps

Si y = f(x) , x varie selon la variation du temps t , alors y varie aussi selon la varition du temps t. c,est -à-dire y est une fonction de la fonction en t et $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$. Cette relation relic le taux de variation de x par le taux de variation de y par rapport au temps .

Le taux est positif si la variable augmente par l'augmentation du temps.

Le taux est négatif si la variable diminue par la diminution du temps .

Exercices généraux

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données :

1. Si $y = 4 \sec^2 x$, alors $y'(\frac{\pi}{4})$ est égale à :

   a) -8 b) zero c) $4\sqrt{2}$ d) 16

2. Si $y = \sin 2x \cos 2x$, alors $y''(\frac{\pi}{3})$ est égale à :

   a) -4 b) zero c) $4\sqrt{3}$ d) 8

3. Un point se déplace sur la courbe $x y^2 = 12$, au point $(3, 2)$, alors $\frac{dx}{dy}$ est égale à:

   a) -4 b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 3

4. Si $y = 2t^3 + 7$ et $z = t^2 - 4$, alors le taux de variation de y par rapport à z est égal à :

   a) $2t$ b) $3t$ c) 6 d) 12

5. Le rayon d'un cercle augmente à un taux de 2 cm/min et son aire augmente à un taux de 20π cm²/min. Alors la longueur de son rayon en ce moment est égale à .... cm

   a) $\frac{5}{2}$ b) 5 c) 10 d) 20

Répondez aux questions suivantes :

6. Déterminez $\frac{dy}{dx}$ si y est égale à :

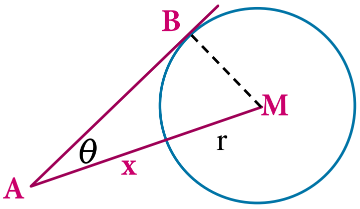
   a) $x + \text{cotg } 2x$ b) $\sqrt[3]{x} + \sec 5x$ c) $2x - 5\cos(\pi x)^2$

   d) $2\cos^2(\pi x + 1)$ e) $\tan x \text{ cotg } x$ f) $\sec 2x \tan 2x$

7. Dans la figure ci-contre : Un point A se déplace dans le plan, $\overline{AB}$ est une tangente du cercle M en B , $AM = X + r$ où r est le rayon du cercle :

   a) Démontrez que $x = r(\text{cosec } \theta - 1)$

   b) Déterminez le taux de variation de x par rapport à θ quand $\theta = \frac{\pi}{6}$



8. Déterminez $\frac{dy}{dx}$ sous la forme la plus simple dans ce qui suit :

   a) $x^2 - 3y^2 + 9 = 0$ b) $5x^2 + 12y^3 - 7 = 0$

   c) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 14$ d) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

   e) $xy + \sin x = 5$ f) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}$

9. a) Déterminez le taux de variation de $(x + 3)(x - 2)$ par rapport à $\frac{x-3}{x+2}$

   b) Si $f(x) = \frac{2}{x+1}$; $g(x) = 3x$

   Déterminez $\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)]$ en $x = -2$

10 **a** Si $y = \sqrt{2x+5}$, démontrez que $(2x+5)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

b Si : $x y = \sin a x$, démontrez que $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + a^2 x y = 0$

c Si $y = a\cos x^2 + b\sin x^2$, démontrez que : $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3 y = 0$

11 Déterminez l'équation de la tangente et de la normale des courbes suivantes aux points donnés:

a $x^2 - x y\sqrt{3} + 2y^2 = 12$ $(\sqrt{3} ; 3)$

b $x \sin 2y = y\cos 2x$ $(\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2})$

12 L'équation de la tangente et de la normale des courbes suivantes aux points donnés :

a $x = n^2 + 2n + 3$, $y = 2n^3 - 6n + 1$ si $n = 0$

b $x = \sec^2\theta - 1$, $y = \tan\theta$ si $\theta = \frac{-\pi}{4}$

13 Déterminez l'aire du triangle limitée par l'axe des ordonnées, la tangente et la normale de la courbe $4x^2 + y^2 = 20$ au point (1 ; - 4).

14 Démontrez que les courbes $y^4 + 9y = 6x$ et $x^2 - 2y = 3x$ se coupent perpendiculairement au point d origine.

15 Démontrez que la droite $(\frac{x}{a})^n + (\frac{y}{b})^n = 2$ est une tangente à la courbe $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ au point (a ; b) quelque soit la valeur de t.

16 Un point se déplace en ligne droite. La relation entre la distance et le temps est $D = 3t^3 + 3t^2 - 4$ où D en centimètres, t en secondes. Déterminez le taux de variation de la distance par rapport au temps à la fin de 3 secondes.

17 Le gaz s'échappe d'un ballon sphérique avec un taux de x cm^3/s. Démontrez que le taux de diminution de son aire au moment au rayon est r cm, est égale à $\frac{2x}{r}$ cm^2/s.

18 Un point se déplace sur la courbe d'équation $x^2 = 4x$, si le taux de variation de son abscisse par rapport au temps au point (4 ; - 4) est égale à 2 unités/s, trouvez le taux de variation de son ordonnée par rapport au temps.

19 Un rectangle de 24 cm de longueur, 10 cm de largeur. Sa longueur diminue avec un taux de 2 cm/s, sa largeur augmente avec un taux de 1,5 cm /s. Déterminez le taux de variation de son aire après 4 secondes. Puis déterminez le temps pour lequel l'augmentation de l'aire s'arête. Quelle est l'aire du rectangle en ce moment ?

20 Une échelle de longueur constante. Son extrémité supérieure glisse sur un mur vertical avec un taux de k unités /s . Déterminez le taux d'éloignement de son extrémité inférieure du mur quand l'échelle est inclinée à la verticale d'un angle θ où cosec $\theta = \frac{5}{4}$.

21 Une pyramide métallique régulière de base carrée dont la hauteur est égale à la longueur de sa base, se dilate avec un taux d'augmentation du volume de 1 cm^3/s. Si l'augmentation de sa hauteur et de la longueur de sa base est 0,01 cm/s, déterminez la longueur du côté de la base.

22) Une échelle de 2,6 m de longueur repose par l'extrémité supérieure sur un mur vertical et par l'extrémité inférieure sur un sol horizontal. Si l'extrémité inférieure s'éloigne du mur avec un taux de 4 m/mn quand elle est à 1 m du mur. Déterminez le taux du mouvement de son extrémité supérieure et le taux de variation de l'angle d'inclinaison de l'échelle sur le sol en ce moment.

23) Un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 3 ; 4 ; 12 cm. Si le taux d'augmentation de sa première dimension est 2 cm/s , le taux de augmentation de la deuxième est 1 cm/s, et le taux de diminution de la troisième est 3 cm/s ; déterminez le volume du parallélépipède en un moment quelconque t, puis déterminez le taux de variation de son volume 2 secondes après .

24) Un réservoir de pétrole à la forme d'un cylindre circulaire droit dont la longueur du diamètre de sa base est 24 cm. On veut vider le réservoir avec un taux de 2 m3/s, alors quel est le taux de variation de l'hauteur du pétrole dans le réservoir ?

25) Un hélicoptère se lève verticalement avec un taux constant de 42 m/mn. Un observateur qui est éloigné 150 m de son point de départ. Déterminez le taux de variation de son angle d'élévation quand il est à 150m d'altitude de la surface de la terre.

26) Dans un concours de 100 mètres, un coureur court dans un trajet droit vers la ligne finale. La caméra de la ligne finale était à 5 mètres perpendiculairement au trajet dans le même plan horizontal que les coureurs. Déterminez le taux de variation de l'angle de la caméra pour observer un coureur à 5 mètres de la fin sachant que son taux d'approchement de la fin est 10 m/s.

27) Un point A (x ; y) se déplace sur une courbe d'équation $\frac{dy}{dt}$ = 2 unités / s. Déterminez le taux de variation de l'aire du triangle AOB où O est l'origine, le point B (0 ;6) au moment à l'abscisse du point A est 3.

Pour plus d'activités et des exercices : visite le site électronique www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulative

Choisissiez la bonne réponse parmi les réponses données :

1. Si f(x) = cotg x, alors f'' ($\frac{\pi}{4}$) est égale à :

   a) $-\frac{4}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) 4 d) $\frac{9}{2}$

2. Un point se déplace sur la courbe $y^2 = 25 - x^2$ où $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x+3}$, alors au point (- 3 ; 4), $\frac{dy}{dt}$ est égale à:

   a) $-\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{9}$ d) 9

3. Si l'équation de la normale à la courbe y = f (x) au point (1 ; 1) est x + 4 y = 5 alors f'(1) est égale à :

   a) - 3 b) $-\frac{1}{4}$ c) 4 d) - 4

4. La tangente à la courbe $y = 3x^2 - 5$ au point (1 ; - 3) passe par le point :

   a) (5 , - 2) b) (3 , 1) c) (2 , - 4) d) (0 , - 8)

Répondez aux questions suivantes :

5. Si $x = t - t^2$, $y = t - t^3$, trouve $\frac{d^2y}{dx^2}$

6. Les deux équations paramétriques de la courbe sont $x = t^2 - 6t$, $y = 8\sqrt{t-2}$, Déterminez l'équation de la tangente à la courbe en t = 6

7. ABC est un triangle d'aire A, le point C se déplace sur la droite y = 2 x. Si A (L , 0) , B (0, k) où L et K sont deux constantes positives. Démontrez que $\frac{dA}{dx} = L + \frac{k}{2}$

8. Déterminez le taux de variation de $\sqrt{9 + x^2}$ par rapport à $\frac{x}{x-1}$ en x = - 4

9. a) Si $y = 4 + \text{cotg } x - \sec^2 x$, Déterminez l'équation de la normale en $x = \frac{\pi}{4}$

   b) Un octogone régulier de 10 cm de longueur de côté. Son côté augmente avec un taux de 0,2 cm/s. Déterminez le taux d'augmentation de son aire.

10. Une échelle de 4m de longueur repose par l'extrémité supérieure sur un mur vertical et par l'autre extrémité sur un sol horizontal. Si l'extrémité inférieure s'éloigne du mur avec un taux de 20 cm/s. Déterminez le taux d'abaissement de son extrémité supérieure quand l'échelle est inclinée au sol à un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Si vous ne pouvez pas répondre à une question, vous pouvez vous guider du tableau suivant :

Question No	1	2	3	4	5	6	7	8	9 A	9 B	10
Voir	3	2	4	4	2	2	2	2	4	5	5

Unité 2

Dérivation et Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

Introduction de l'unité

Dans cette unité on doit savoir le nombre népérien e, (1550 - 1617) attribué au savant écossais John Napier(1550 – 1617) Ce qui introduit la notion de logarithmes en mathématiques. Ce nombre est appelé aussi le nombre de Euler, honneur du savant qui a bien étudier ce nombre et les fonctions liées à ce nombres et aussi la découvrir de la relation $e^{i\pi} + 1 = 0$ parmi les plus cinq constantes de Mathématiques qui lie les fonctions trigonométriques, exponentielles et les nombres complexes.

Le nombre e est un nombre réel non rationnel et est égal à peu près 2.718281828459. Il a une importance en mathématiques où il est la base de la fonction exponentielle de base népérienne e^x [exp(x)] ,et de la fonction logaritmique népérienne ln x. On va étudier dans cette unité tous ses fonction et leurs dérivées et leurs dérivées réciproque (primitive) avec des logicil de graphique pour résoudre des probléme de mathématiques et de la vie dans plusieurs damaines.

Résultats d'apprentisage :

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de ::

- Savoir la notion du nombre népérien e de la limite

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

- Déterminer des limites dont les résultats est e ou l'un de ses multiples

  $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^2 = e^2$

- Savoir la notion du logarithme $\log_e x$ népérien ln de la limite $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log_e x$

- Savoir des propriétés du logarithme népérien comme:
  - $\log_e x = y \Leftrightarrow e^y = x$
  - $e^{\log_e x} = x$, $x > 0$
  - $\log_e^{x} = 1$, $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}$

- Déterminer les dérivées des fonctions exponentielles $y = e^x$, $y = a^x$, et les dérivées des fonctions logarithmiques $y = \log_e x$, $y = \log_a x$

- Déterminer les primitives des fonctions $y = e^x$ et $\log_e x$

Vocabulaires de base

- *Exposant*
- *Puissance*
- *Base*
- *Puissance fractionaire*
- *Puissance croissante*
- *Puissance décroissante*
- *Fonction exponentiel*
- *Equation exponnentielle*
- *Logarithme*
- *Forme*
- *Logarithme décimal*
- *Logarithme népérien*
- *Constante népérien*
- *Dérivation logarithmique*
- *Dérivée inverse*
- *Primitive*
- *Constante arpétraire*
- *Intégrale infinie*

Léçons de l'unité

Léçon (2 - 1):fonction exponentielle et fonction logarithique.

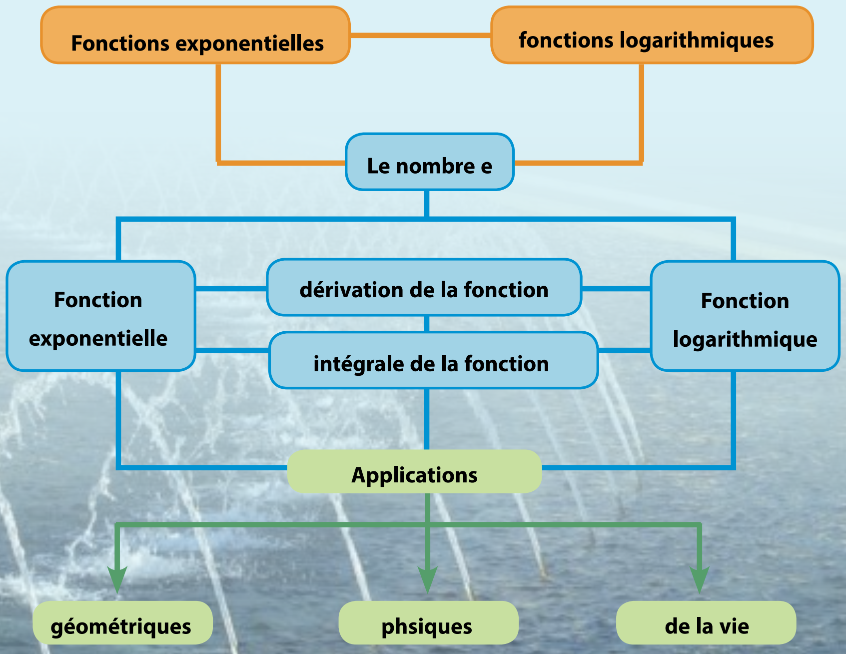
Léçon (2 - 2):dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques.

Léçon (2 - 3):intégrale des fonctions exponentielles et logarithmiques.

Aides pédagogiques

- *Calculatrice graphique*
- *logiciels de graphisme*

Organigramme de l'unité



2 - 1 fonction exponentielle et fonction logarithmique

Apprendre

- Notion du nombre népériene comme une limite
- Déterminer une limité dont la réponse (est e ou) un de ces multiple
- Définition de la fonction exponentielle
- Notion de logarithme népérien

Vocabulaires de base

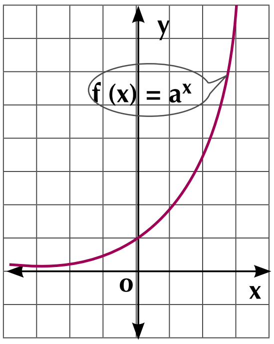
- Fonction exponentielle
- Fonction trigonométrique

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Ordinateur avec des logiciels de grephisme
- Internet
- Recherche de l'internet du nombre (e)

Découvert

Vous avez déjà étudié la la fonction exponentielle : $f(x) = a^x$ où $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
Vous savez que sa courbe passe par les points $(0 , 1) , (1 , a) , (-1 , \frac{1}{a})$



- Toutes les courbes des fonctions exponentielles passent-elles par le point (0 ; 1) ? vérifiez votre réponse.
- Si la courbe d'une fonction exponentiel passe par le point (1 ; 3), alors quelle est la valeur de la base a.

Définition

Le nombre e est défini par la relation $= \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

- Répresentez graphiquement la courbe de la fonction f où $f(x) = e^x$ c'est-à-dire f(x) = exp(x) en utilisant le logiciel GeoGebra ou un autre logiciel. Pouvez vous découvrir une valeur approchée du nombre e ?

Explorez (Decouvrez) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en utilisant une calculatrice pour compléter le tableau ci-contre.

x	$(1 + \frac{1}{x})^x$
2	$(1 + \frac{1}{2})^2 =$ 2.25
10	
100	
1000	
10000	
100000	

- la calculatrice, comme le tableau ci – contre La valeur de la limite s'approche de la valeur approchée qui est déjà déterminée de e ? que déduisez –vous ?
- Est ce que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$?

  verifiez votre réponse

Remarquez

1) Vous pouvez déterminer une valeur approchée par la calculatrice en touchant les clés:

Start → Shift ln 1 =

On trouve $e \simeq 2.718281828$ à 9 chiffres décimals approchée

2) $\because\ e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ **(1)**

soit $m = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ alors $m \to 0$ en $x \to \infty$

$\therefore \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{m \to 0} (1 + m)^{\frac{1}{m}}$

C'est – à – dire $e = \lim_{x \to 0} \left(1 + x^{\frac{1}{x}}\right)$

Exemple

limite tends vers le nombre e

1 Déterminez:

a $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

b $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$

Solution

a $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = e^3$

b $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \times \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = e \times (1 + 0)^3 = e$

Essayez de résoudre

1 Déterminez :

a $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}x}$

b $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$

Exemple

2 Déterminez:

a $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

b $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+4}$

Solution

a posons $y = \frac{5}{x}$ où $x \neq 0$ alors $y \to 0$ quand $x \to \infty$

$\therefore \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{5}{y}} = \lim_{y \to 0} \left((1 + y)^{\frac{1}{y}}\right)^5 = e^5$

b $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+4} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1+3}{x-1}\right)^{x+4} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{x+4}$

$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{x-1} \times \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^5 = e^3 \times (1)^5 = e^3$

Essayez de résoudre

2 Déterminez :

a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^{x}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 1}\right)^{x + 2}$

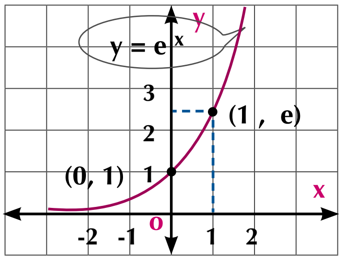
Remarquez : On peut écrire le nombre e en utilisant **(la série de Tylor)** sous la forme:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots \infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Apprendre

La fonction exponentielle de base le nombre népérien

Elle est une fonction dont la base est e ,
$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Remarquez

1) L’ensemble de définition f où $f(x) = e^x$ est $\mathbb{R}$ et son ensemble images est $]0, \infty[$

2) La courbe de la fonction passe par les points (0 , 1) et (1 , e)

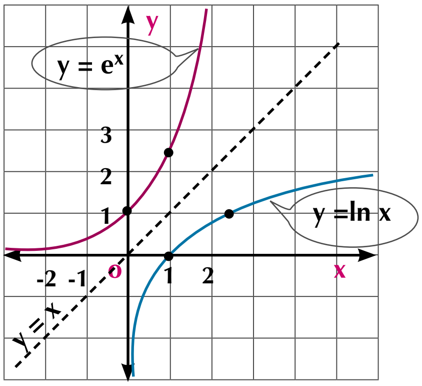
3) $f(x) = e^x$ est une fonction injective admet une réciproque qui est appelée fonction logarithme népérien.

4) On utilise le symbole exp (x) pour tracer la fonction f dans un logiciel.

Fonction logarithme népérien

Elle est une fonction logarithmique de base e , $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

Remarquez:



$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$,

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

1) L’ensemble de définition f où $f(x) = \ln x$ est $\mathbb{R}^+$ et son ensemble images est $\mathbb{R}$

2) La courbe de la fonction passe par les points (1 ; 0) et (e ; 1)

3) Elle est une fonction réciproque de la fonction $y = e^x$

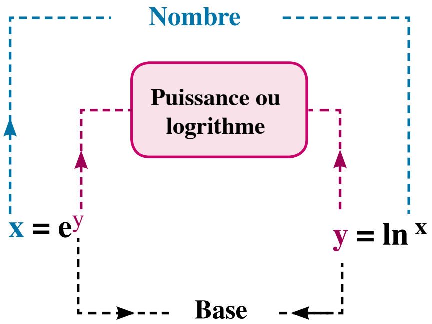
4) On utilise le symbole ln (x) pour tracer la fonction dans un logiciel.

5) Pour déterminer une valeur approchée de ln 10, on doit taper les clés:

Start → ln 1 0 =

On trouve que ln 10 = 2.302585093 à 9 décimale près.

Propriétés de logarithme népérien



Le logarithme népérien a les mêmes propriétés du logarithme déjà étudiées.

Si $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ alors :

1) la forme $\ln x = y$ est équivalant à la forme $e^y = x$

2) $e^{\ln x} = x$ **3)** $\ln e = 1$

4) $\ln 1 = 0$ **5)** $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ **(propriété du changement de la base)**

Pour tout $x , y \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$

6) $\ln xy = \ln x + \ln y$ **7)** $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$

8) $\ln x^n = n \ln x$ **9)** $\ln x \times \ln e = 1$

Remarquez qu'on peut utiliser le logarithme népérien pour calculer des opérations de même façon que le logarithme décimal, mais on aura d'effort car par exemple $\ln 10 \simeq 2,3026$. Pour ce la on préfère l'utiliser aux limites ; dérivation et la résolution des équations exponentielles et logarithmiques de base e.

Limites et logarithme népérien

Exemple

3 Démontre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ où $a > 0$

Solution

Soit : $y = a^x - 1$, en $x \to 0$ alors $y \to 0$ **(1)**

Alors $a^x = 1 + y$ **prenant le logarithme de deux membres**

$\therefore \ln a^x = \ln (1 + y)$ **en utilisant la propriété de logarithme**

$\therefore x \ln a = \ln (1 + y)$ **alors :** $x = \dfrac{\ln (1 + y)}{\ln a}$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on déduit que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} \times \ln a = \lim_{y \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{y} \ln (1 + y)} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln a}{\ln (1 + y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{\ln a}{\lim\limits_{y \to 0} \ln (1 + y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{\ln a}{\ln \lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$$

Remarque importante : on utilise l'exemple précédent comme une règle pour résoudre des exercices et aussi de même pour les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$ (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (1 + x)}{x} = 1$

Essayez de résoudre

3 Démontrez que : $\lim\limits_{n \to \infty} n \left[\ln (n + 1) - \ln n\right] = 1$

Exercices 2 - 1

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ est égale à :

a 1 b 2 c e d e^2

2 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{3x}}$ est égale à :

a $\dfrac{1}{3}$ b e^3 c $e^{\frac{1}{3}}$ d $\dfrac{e}{3}$

3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{3x}$ est égale à :

a $3 \ln 2$ b $\dfrac{1}{3} \ln 2$ c $\ln \dfrac{2}{3}$ d $2 \ln 3$

4 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$ est égale à :

a 0 b 1 c e d e^{-1}

Déterminez :

5 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x + 1}$

6 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x + 1}\right)^{x}$

7 $\lim\limits_{m \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^{m x}$

8 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 7}{x + 3}\right)^{x + 4}$

9 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (1 + 2x)}{x}$

10 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (1 + x^2)}{x^2}$

Déterminez les limites suivantes :

11 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^{x + 3}$

12 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{-x} - 1}{x}$

13 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{2x} - 1}{x}$

14 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$

15 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x + 1}\right)^{x}$

16 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (1 + 3x^2)}{2x^2}$

Dérivation des fonctions exponentielles et logarithmiques

2 - 2

Découvrez:

En utilisant la calculatrice, complètez le tabeau suivant puis découvrez $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

x	.001	.0001	.00001	0	- 0.00001	- 0.0001	- .001
$\frac{e^x - 1}{x}$							.999500

Revoyez l'exemple (4) de la leçon précédante et verifiez votre découvert.

Apprendre

La dérivée de la fonction logarithme népérien

Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

De la définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= e^x \times \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^x \times 1 = e^x$$

i.e $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

Exemple

La dérivée de la fonction logarithme népérien

1. Déterminez la dérivée première dans ce qui suit:

a $y = x^2 + 3e^x$ **b** $y = x^3 e^x$ **c** $y = \frac{2e^x}{x+1}$

Solution

a $\because y = x^2 + 3e^x \therefore \frac{dy}{dx} = 2x + 3\frac{d}{dx}(e^x) = 2x + 3e^x$

b $\because y = x^3 e^x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = x^3 \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \frac{d}{dx}(x^3)$

$= x^3 e^x + 3x^2 e^x = x^2 e^x (x + 3)$

Apprendre

- Dérivation des fonctions exponentielles
- Dérivation des fonctions logarithmiques
- Dérivation logarithmiques
- Dérivées successives des fonctions exponentielles
- Symbolisez les problèmes

Vocabulaires de base

- Dérivée
- Dérivation en chaîne
- Première dérivée
- Dérivation logarithmiques

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

c $\because y = \dfrac{2\,e^x}{x+1}$ $\quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)\dfrac{d}{dx}(2e^x) - 2e^x\dfrac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2xe^x}{(x+1)^2}$

Essayez de résoudre

1 Déterminez $\dfrac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = 2e^x + \cos 2x$ **b** $y = e^x \sin x$ **c** $y = \dfrac{e^x}{\tan x}$

Reflexion critique : Quelle est la relation entre la pente de la tangente de la courbe $y = e^x$ à un point quelconque de la courbe et l'ordonnée de ce point ? vérifiez votre réponse.

Dérivation en chaîne

Si z est une fonction dérivable par rapport à x , $f(z) = e^z$ **alors :** $\dfrac{d}{dx}(e^z) = e^z \cdot \dfrac{dz}{dx}$

Exemple

2 Déterminez la dérivée première dans ce qui suit :

a $y = e^{3x^2+5}$ **b** $y = 3e^{\sec x}$ **c** $y = (e^{3x} - e^{-2x})^5$

Solution

a $\because y = e^{3x^2+5}$ $\quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = e^{3x^2+5} \times \dfrac{d}{dx}(3x^2+5) = 6x\,e^{3x^2+5}$

b $\because y = 3e^{\sec x}$ $\quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = 3\,e^{\sec x} \times \dfrac{d}{dx}(\sec x) = 3\,e^{\sec x} \cdot \sec x \tan x$

c $\because y = (e^{3x} - e^{-2x})^5$ $\quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = 5\,(e^{3x} - e^{-2x})^4\,[3e^{3x} + 2e^{-2x}]$

Essayez de résoudre

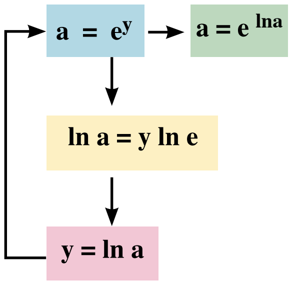
2 Déterminez $\dfrac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = 2x + e^{6x}$ **b** $y = \dfrac{1}{2}e^{7-x^2}$ **c** $y = (e^{2x} + e^{-2x})^3$

Apprendre

Dérivation de la fonction logarithmique de base a

Si $f(x) = a^x$ **alors** $f'(x) = a^x \ln a$



Remarquez que $a = e^{\ln a}$ **(des propriétés de logarithme)**

$\therefore a^x = \left[e^{\ln a}\right]^x = e^{x\ln a}$

alors $\dfrac{d}{dx}(a^x) = \dfrac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a} \times \ln a = a^x \times \ln a$

en générale : $\frac{d}{dx}(a^z) = a^z \ln a \cdot \frac{dz}{dx}$

Exemple

Dérivation de la fonction exponentielle

(3) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a) $y = 5 \times 6^x$ b) $y = 3^{(3x^2 - 5x + 2)}$ c) $y = e^{\sin x} \times 2^{-5x}$

Solution

a) $\because y = 5 \times 6^x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \frac{d}{dx}(6^x) = 5 \times 6^x \ln 6$

b) $\because y = 3^{3x^2 - 5x + 2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = (6x - 5) \times 3^{(3x^2 - 5x + 2)} \times \ln 3$

c) $\because y = e^{\sin x} \times 2^{-5x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \frac{d}{dx}(2^{-5x}) + 2^{(-5x)} \frac{d}{dx} e^{\sin x}$

$= e^{\sin x} [-5 \times 2^{-5x} \ln 2] + 2^{-5x} [e^{\sin x} \cos x]$

$= 2^{-5x} e^{\sin x} [\ln 2^{-5} + \cos x]$

Essayez de résoudre

(3) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a) $y = 5^{x^2 + 2x}$ b) $y = 2^{\sec^2 x}$ c) $y = e^{2x} a^{x^2 - 5}$

Apprendre

Dérivation de la fonction de logarithme népérien

Si $f(x) = \ln x$, $x > 0$ **alors** $f'(x) = \frac{1}{x}$

Remarquez que la fonction logarithmique est une fonction réciproque de la fonction exponentielle

Si $y = \ln x$ **alors** $x = e^y$ (1)

On dérive les deux membres de la relation (1) par rapport à x $\therefore 1 = e^y \frac{dy}{dx}$ (2)

De (1) et (2) : on obtient $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ **c'est-à-dire:** $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Exemple

Dérivation de la fonction de logarithme népérien

(4) Déterminez la dérivée première dans ce qui suit:

a) $y = 3x + \ln x$ b) $y = (2x^5 - 3) \ln x$ c) $y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

Solution

a $\because y = 3x + \ln x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 3 + \frac{d}{dx}(\ln x) = 3 + \frac{1}{x}$

b $\because y = (2x^5 - 3)\ln x$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = (2x^5 - 3)\frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(2x^5 - 3)$

$$= (2x^5 - 3) \times \frac{1}{x} + 10x^4 \ln x$$

$$= \frac{1}{x}[(2x^5 - 3) + 10x^5 \ln x]$$

c $\because y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ $\qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} - (\ln x - 1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2} = \frac{2}{x(\ln x + 1)^2}$

Essayez de résoudre

(4) Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = 5 - 3\ln x$ **b** $y = x^2 \ln x$ **c** $y = \frac{1 - 2\ln x}{\ln x}$

Reflexion critique : Quelle est la relation entre la pente de la tangente de la courbe $y = \ln x$ à un point quelconque de la courbe et l'ordonnée de ce point ? vérifiez votre réponse.

Dérivation en chaîne

➲ **Si** z est une fonction dérivable par rapport à x , $f(z) = \ln z$

alors : $\frac{d}{dx}[\ln z] = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx}$

➲ **Si** $x < 0$, **alors:** $\frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$

➲ **En général** $\frac{d}{dx}[\ln |x|] = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$

, $\frac{d}{dx}[\ln |z|] = \frac{z'}{z}$ où z est une fonction dérivable par rapport à x.

Exemple

(5) Déterminez $\frac{d}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = \ln(2x^3 + 9)$ **b** $y = x^4 \ln x^3$ **c** $y = \ln \frac{x^2}{x + 7}$

Solution

a $\because y = \ln(2x^3 + 9)$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^3 + 9} \times \frac{d}{dx}(2x^3 + 9) = \frac{6x}{2x^3 + 9}$

b $\because y = x^4 \ln x^3$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = x^4 \frac{d}{dx}(\ln x^3) + \ln x^3 \frac{d}{dx}(x^4)$

$$= x^4 \times \frac{1}{x^3} \times 3x^2 + \ln x^3 \times 4x^3$$

$$= 3x^3 + 4x^3 \ln x^3 = x^3 [3 + 4 \ln x^3]$$

c $\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{x^2}{x+7}\right) = \frac{x+7}{x^2} \times \frac{(x+7)(2x) - x^2 \times 1}{(x+7)^2} = \frac{x+14}{x(x+7)}$

Essayez de résoudre

5 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = \ln (7x - 3)^2$ **b** $y = 2x^2 \ln x^3$ **c** $y = \frac{x}{\ln x}$

Apprendre

Dérivation de la fonction logarithmique de base a

Si $f(x) = \log_a x$, **alors** $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

Remarquez $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$

Alors $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$

En général $\frac{d}{dx}(\log_a z) = \frac{1}{z \ln a} \cdot \frac{dz}{dx}$

Rappel

Des proprieties de logarithme

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\ln a \times \log_a e = 1$

Dérivation de la fonction de logarithmique

Exemple

6 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = \log_3 x$ **b** $y = \log_5 (3x - 2)$ **c** $y = \log (2x - 3)^2$

Solution

a $\because y = \log_3 x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{x \ln 3}$

b $\because y = \log_5 (3x - 2)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x - 2) \ln 5}$

c $\because\ y = 2\log|2x - 3|$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 \times 2}{(2x - 3)\ln 10} = \dfrac{4}{(2x - 3)\ln 10}$

Essayez de résoudre

6 Déterminez la pente de la tangente des courbes suivantes aux valeurs de x données:

a $y = \log_2 5x \quad , \quad x = 2$ **b** $y = 4\log(3x + 1) \quad , \quad x = 1$

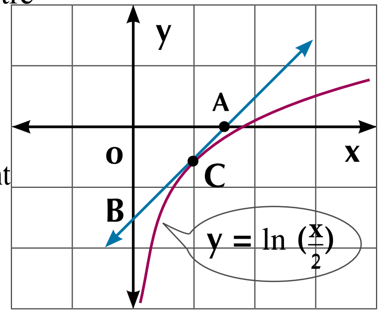
c $y = \log_2 (2x^2 - 3)^4 \quad , \quad x = 1$ **d** $y = 3(\log x)^2 \quad , \quad x = 3$

7 Applications géométriques: Si $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente à la courbe $y = \ln \frac{x}{2}$ au point C (1 , y) et coupe l'axe des abscisses au point A et l'axe des ordonnées au point B. Déterminez la longueur de $\overline{AB}$

équation dfe la tangente $\overleftrightarrow{AB}$ → points d'intersections A, B → longueur $\overline{AB}$

Solution

Pour déterminer la longueur de $\overline{AB}$, on suit le diagramme ci –contre



La pente de la tangente à un point quelconque : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 \times 2}{x} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente à la courbe au point C (1 ; y)

Alors $y = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ c'est –à-dire C (1 , - ln 2), et en ce point

$\dfrac{dy}{dx} = 1$, et l'équation de la tangente $\overleftrightarrow{AB}$ en C est :

$y + \ln 2 = x - 1$

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ coupe l'axe des abscisses au point A $\quad\therefore$ A (1 + ln 2 , 0)

et coupe l'axe des ordonnée au point $\quad\therefore$ B (0 ; - 1 - ln 2)

Alors $(AB)^2 = (1 + \ln 2)^2 + (1 + \ln 2)^2 \quad \therefore AB = \sqrt{2}\,(1 + \ln 2)$

Essayez de résoudre

7 Si la normale à la courbe $y = \ln 2x$ au point A (1 ,ln 2) coupe l'axe des abscisses au point B Déterminez la longueur de $\overline{AB}$ à trois décimales près.

Applications de mathématiques

Dérivation logarithmique

On peut représenter une relation sous forme logarithmique par calculer le logarithme népérien de deux membres de la relation et on utilise les propriétés de logarithme pour simplifier la forme avant de faire la dérivée.

Exemple

8 Déterminez $\dfrac{dy}{dx}$ dans ce qui suit:

a $y = (x^3 + 5)^x$ **b** $y = [\sin x]^{\tan x}$

Solution

a $\because\ y = (x^3 + 5)^x$ — On calcule le logarithme népérien de deux membres de la relation

$\therefore\ \ln y = x \ln (x^3 + 5)$ — On dérive les deux membres de la relation par rapport à x

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln (x^3 + 5) + \frac{x}{x^3 + 5} \times 3x^2$ — On mutiplie les deux membres $\times\ y = (x^3 + 5)^x$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = (x^3 + 5)^x \left[\frac{3x^3}{x^3 + 5} + \ln (x^3 + 5)\right]$

b $\because\ y = [\sin x]^{\tan x}$ — On calcule le logarithme népérien des deux membres de la relation

$\ln y = \tan x \ln \sin x$ — On dérive les deux membres de la relation par rapport à x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan x \times \frac{d}{dx}(\ln \sin x) + \ln \sin x \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x + \ln \sin x \times \sec^2 x$$

$$= 1 + \sec^2 x \log_e \sin x$$

On mutiplie les deux membres $\times\ y = [\sin x]^{\tan x}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = [\sin x]^{\tan x} (1 + \sec^2 x \ln \sin x)$$

Essayez de résoudre

8 Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

a $y = x^{2x}$ **b** $y = (\sin x)^x$ **c** $y^2 = 3^x \times 2^y$

9 Vérification d'une relation : Si $y = e^{-x}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ où $-1 < x < 1$, Démontrez que: $(1 - x^2)\ y' = x^2\ y$

Solution

$\because\ y = e^{-x}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ — on calcule le logarithme de base e des deux membres

$$\therefore\ \ln y = \ln e^{-x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\ln y = -x + \frac{1}{2} [\ln (1 + x) - \ln (1 - x)]$$

on dérive les deux membres de la relation par rapport à x

$$\frac{1}{y} \times y' = -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + x} - \frac{-1}{1 - x}\right]$$

$$\frac{y'}{y} = -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1 - x + 1 + x}{1 - x^2}\right]$$

$$\frac{y'}{y} = -1 + \frac{1}{1 - x^2} = \frac{-1 + x^2 + 1}{1 - x^2}$$

$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{1 - x^2}$ $\quad \therefore (1 - x^2)\, y' = x^2\, y$

Essayez de résoudre

9) Si $y = ae^{\frac{b}{x}}$, Démontrez que : $x\,y\,y'' + 2\,y\,y' - x\,y'^2 = 0$

Exercices 2 - 2

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1) Si $f(x) = e^{3x}$, alors $f'(x)$ est égale à :

a) e^{3x} b) $3e^{3x}$ c) $9e^{3x}$ d) $3e^{2x}$

2) Si $f(x) = ae^{x}$, alors $f'(-2)$ est égale à :

a) $-f(2)$ b) $-f'(2)$ c) $-f(-2)$ d) $f(-2)$

3) La courbe de la fonction $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$ est la même courbe de la fonction g : $g(x) = \ln x$ suivant la translation:

a) (1 , 2) b) (1 , -2) c) (-2 , 1) d) (2 , 1)

4) Le rapport de la pente de la tangente à la courbe $y = \ln 3\sqrt{x+1}$ et la pente de la tangente à la courbe $y = \ln 5\sqrt{x+1}$ en $x = a$ est:

a) 3 : 5 b) 5 : 3 c) 1 : 1 d) ln 3 :ln 5

Déterminez la dérivée première dans ce qui suit :

5) $y = e^{3x^5}$

6) $y = e^{x^2 - x}$

7) $y = (3^{x-1})^{-2}$

8) $y^2 = e^{5x^2 - 3}$

9) $y = \ln(2x - 7)$

10) $y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + x)$

11) $y = \ln\frac{x^2}{x + 7}$

12) $y = x^2 \ln x$

13) $y = \log_3 (4x + 9)^2$

14) $y = \frac{e^{3x}}{\log x}$

15) $y = \sec e^{x}$

16) $y = 2e^{3x} - 5\log_2 \frac{x}{5}$

Déterminez la pente de la tangente de chacune des courbes suivantes aux valeurs données :

17) $y = \sqrt{x} - 2e^{x}$, $x = \frac{1}{4}$

18) $y = x^2 - 3\ln x$, $x = 2$

19) $y = \frac{1}{4}e^{2x} - 2\ln x$, $x = \frac{1}{2}$

Déterminez $\frac{dy}{dx}$ dans ce qui suit :

20) $y\,e^x = e^3$ 21) $x \ln y = 58$ 22) $y = x^{\sin x}$

23) $y = e^{e^x}$ 24) $y = e^{x^e}$ 25) $y = x^{\frac{1}{x}}$

Déterminez $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans ce qui suit :

26) $x = e^{2n}$, $y = n^3$

27) $x = 6 \ln n$, $y = n^2$

Répondez à ce qui suit :

28) SI $y = x^2 \ln \frac{x}{a}$, Déterminez $\frac{d^3y}{dx^3}$ en $x = 4$

29) Si $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lfloor n}$ (dévelopement de Tilohrs), Démontrez que: $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

30) Si $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, Démontrez que $(x^4 - 1)\,y' + 2x\,y = 0$

31) Déterminez les valeurs de x auxquelles la tangente à la courbe $y = 9x^3 - 8\ln x$ est parallèle à l'axe des abscisses.

32) Déterminez l'équation de la normale à la courbe $y = 3e^x$ à un de ses points dont l'abscisse est égale à -1

33) Lien à l'industrie : Si ll production quotidienne d'une usine pendant une période du temps t, est déterminé par la relation $y = 400\,(1 - e^{-0.30t})$ Unités. Déterminez le taux de variation du nombre des unités produites par rapport au temps pendant le dixième jour.

34) Application de la vie : Si la production d'une ruche d'abeille est définie par la relation : $y = (n + 100)\ln(t + 5)$ en fonction du nombre de jours n. Déterminez le taux de variation de la production de la ruche en $t = 5$, $t = 15$ et en $t = 20$. Est-ce que la production du mille augmente (ou diminue)?

2 - 3 Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

A apprendre

- Intégrale des fonctions exponentielles et logarithmiques.
- Application géométriques.
- Application physiques.

vocabulaires de base

- Dérivée réciproque (primitive)
- intégral
- intégral infini
- constante arbitraire

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Découvrez

D'après l'étude précédente du calcul différentielle, on sait que la dérivée de la fonction h par rapport à x où $h(x) = e^x + 5$ est $h'(x) = e^x$

Si on nome la fonction h '(x) par f(x), alors on peut trouver

quand c = 5 → $h(x) = e^x + 5$

primitive de la fonction f: $F(x) = e^x + c$, c Constant

$\frac{d}{dx}$ [h (x)]

$\int f(x)\,dx$

$h'(x) = e^x = f(x)$

dérivée de la fonction

par une opération réciproque une infinité de fonctions (F(x) + c) dont la dérivée de chacune d'elle est f(x). Elles sont appelées une famille des primitives de la fonction f dont l'une d'elle est h(x) où :

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ où c est une constante arbitraire

Découvrez la famille des primitives dans ce qui suit :

$f(x) = 5e^{5x}$, $g(x) = 8e^{x^4}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Apprendre

Intégral infini de la fonction exponentielle

Si K est un nombre réel où $k \neq 0$

alors: $\int e^x\,dx = e^x + c$

, $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$ **où c est une constante arbitraire**

Exemple

1 Trouvez :

a $\int e^{7x}\,dx$ b $\int e^{-\frac{3}{4}y}\,dy$ c $\int 8\,e^{2z}\,dz$

Solution

a $\int e^{7x}\,dx = \frac{1}{7} e^{7x} + c$

b $\int e^{-\frac{3}{4}y}\,dy = \frac{1}{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}y} + c = \frac{-4}{3} e^{-\frac{3}{4}y} + c$

c $\int 8e^{2z}\,dz = 8\int e^{2z}\,dz = \frac{8}{2} e^{2z} + c = 4e^{2z} + c$

Rappel

$\int a\,f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Essayez de résoudre

1 Trouvez

a $\int \pi e^{x}\,dx$ **b** $\int -e^{-5z}\,dz$ **c** $\int -6e^{0.2y}\,dy$ **d** $\int 3\sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}n}\,dn$

Exemple

2 Trouvez chacun des intégrales suivants :

a $\int \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\,dx$ **b** $\int \frac{3e^{x} - 2e^{2x}}{2e^{x}}\,dx$

Solution

a $\int \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (e^{x} + e^{-x})\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int e^{x}\,dx + \int e^{-x}\,dx\right]$

$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) + c$

b $\int \frac{3e^{x} - 2e^{2x}}{2e^{x}}\,dx = \int \frac{3}{2}\,dx - \int e^{x}\,dx$

$= \frac{3}{2}x - e^{x} + c$

Rappel

$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx$
$= \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Essayez de résoudre

2 Trouvez :

a $\int \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x}}\,dx$ **b** $\int (x^{2} + 2e^{x})\,dx$ **c** $\int (x^{2e} + e^{3x})\,dx$

Remarquez que: Si f(x) est une fonction dérivable, alors:

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

Exemple

3 **a** $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$ **b** $\int 4x\, e^{x^{2}+1}\,dx$

Solution

a On pose $f(x) = \cos x$ $\therefore f'(x) = -\sin x$

$\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -\int e^{\cos x}(-\sin x)\,dx = -e^{\cos x} + c$

b On pose $f(x) = x^{2} + 1$ $\therefore f'(x) = 2x$

$\int 4x\, e^{x^{2}+1}\,dx = 2\int e^{x^{2}+1}(2x)\,dx = 2e^{x^{2}+1} + c$

Essayez de résoudre

③ Trouvez chacun des intégrales suivants :

a $\int (\cos x \, e^{\sin x} + 3x^2)\, dx$

b $\int (x - 3)\, e^{x^2 - 6x + 5}\, dx$

Intégral infini de la fonction logarithmique

On sait que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ où $x > 0$, $\frac{d}{dx}(\ln - x) = \frac{1}{x}$ où $x < 0$

En général $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$

c-a-d la fonction $\ln |x|$ où $x \neq 0$ est l'une des primitives de la fonction $\frac{1}{x}$

Par conséquent : $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c$ où $x \neq 0$

Multiples d'une fonction

Exemple

④ Trouvez chacun des intégrales suivants :

a $\int \frac{2}{x}\, dx$ **b** $\int \frac{7}{x \ln 3}\, dx$

Solution

a $\int \frac{2}{x}\, dx = 2 \int \frac{1}{x}\, dx = 2 \ln |x| + c$ où $x \neq 0$

b $\int \frac{7}{x\ln 3}\, dx = \frac{7}{\ln 3} \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{7}{\ln 3} \ln |x| + c$ où $x \neq 0$

Essayez de résoudre

④ Trouvez :

a $\int \frac{\ln 3}{x}\, dx$ **b** $\int \frac{4}{3x \ln 5}\, dx$ **c** $\int \frac{\ln x^2}{x \ln x^3}\, dx$

Exemple

⑤ Trouvez chacun des intégrales suivants :

a $\int \left(3x^2 + \frac{5}{x}\right) dx$ **b** $\int \left(\frac{2e}{x} + \frac{x}{e}\right) dx$ **c** $\int \frac{(3x - 1)^2}{3x}\, dx$

Solution

a $\int \left(3x^2 + \frac{5}{x}\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int \frac{5}{x}\, dx = x^3 + 5 \ln |x| + c$

b $\int \left(\frac{2e}{x} - \frac{x}{e}\right) dx = 2e \int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{e} \int x\, dx = 2e \ln |x| - \frac{x^2}{2e} + c$

c $\int \frac{(3x - 1)^2}{3x}\, dx = \int \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x}\, dx = \int (3x - 2 + \frac{1}{3x})\, dx$

$= \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3} \ln |x| + c \qquad$ où $x \neq 0$

Essayez de résoudre

5 Trouvez chacun des intégrales suivants:

a $\int \frac{6x^2 - 5}{3x}\, dx$ b $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}\, dx$ c $\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

Remarquez que: Si f est une fonction dérivable $f(x) \neq 0$, alors $\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \ln |f(x)| + c$

Exemple

6 Trouvez chacun des intégrales suivants:

a $\int \frac{4}{1 + 2x}\, dx$ b $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 2}\, dx$ c $\int \tan x\, dx$

Solution

a $\because (1 + 2x)' = 2 \qquad \therefore \int \frac{4}{1 + 2x}\, dx = 2 \int \frac{(1 + 2x)'}{1 + 2x}\, dx = 2 \log_e |1 + 2x| + c$

b $\because (x^2 + 3x - 2)' = 2x + 3$

$\therefore \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 2}\, dx = \ln |x^2 + 3x - 2| + c$

c $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$

Essayez de résoudre

6 Trouvez chacun des intégrales suivants:

a $\int \text{cotg } x\, dx$ b $\int \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}\, dx$ c $\int \frac{(x^2 + 2)\, dx}{x^3 + 6x + 1}$

Exemple

7 Application géométrique : Si la pente de la tangente à une courbe à tout point (x ; y) de la courbe est égale à $\frac{3x + 2}{x}$. Trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point (e ; 3e + 5)

Solution

On pose que l'équation de la courbe est $y = f(x)$

$\because$ La pente de la tangent en tout point $= \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2}{x}$

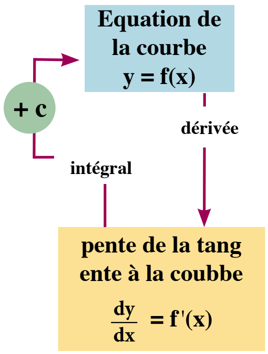
$\therefore y = \int \dfrac{dy}{dx}\, dx = \int (3 + \dfrac{2}{x})\, dx$

$\therefore y = 3x + 2 \ln x + c$ où c est une constante arbitraire

$\because$ La courbe passe par le point $(e \,,\, 3e + 5)$, alors il vérifie son équation c-a-d

$3e + 5 = 3(e) + 2 \ln e + c \qquad \therefore c = 3$

Alors l'équation de la courbe est : $y = 3x + 2 \ln x + 3$



Essayez de résoudre

7 La pente de la tangente à la courbe de la fonction f en tout point (x ; y) de la courbe est égale à et $f(e) = \frac{1}{2}$. Trouvez $f(2e)$

Exemple

8 Application dans la physique : Le taux de variation de l'aire A (en cm^2) d'une plaque métallique par rapport au temps t (en sec) est donné par la relation $\dfrac{dA}{dt} = e^{-0,1t}$. Si l'aire de la plaque au début est 80 cm^2 , trouvez l'aire de la plaque après 10 sec.

Solution

Aire de la plaque $A = \int \dfrac{dA}{dt}\, dt = \int e^{-0.1t}\, dt$

$\therefore \quad A = -10e^{-0,1t} + c$

Quand $t = 0$, $A = 80 \qquad \therefore c = 90$

Alors l'aire de la plaque en un instant quelconque $A = 90 - 10e^{-0.1t}$

Après 10 sec après $\quad \therefore$ l'aire de la plaque $= 90 - 10e^{-1}$ 86,321 cm^2

Essayez de résoudre

8 Si le taux de variation des ventes d'une usine est inversement proportionnelle au temps (en semaines). Si les ventes pendant deux semaines et quatre semaines respectivement sont 200 ; 300 unités. Trouvez les ventes de l'usine après 6 semaines.

Exercices 2 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1. Si $f''(x) = \frac{1}{2}[e^{x} + e^{-x}]$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, alors f(x) est égale à :
   a) $-f'(x)$ b) $f'(x)$ c) $-f''(x)$ d) $f''(x)$

2. Si la pente de la tangente d'une courbe en tout point (x ; y) de la courbe est égale à $4e^{2x}$, $f(0) = 2$, alors $f(-2)$ est égale à :
   a) 4 b) $4e^{-4}$ c) $2e^{-4}$ d) $2e$

3. $\int \tan\theta \, d\theta$ est égale à :
   a) $-\ln|\cos\theta| + c$ b) $-\ln\cos\theta + c$ c) $\ln\cos\theta + c$ d) $|\ln\cos\theta| + c$

4. $\int 4x\, e^{x^2}\, dx$ est égale à
   a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$ b) $e^{x^2} + c$ c) $2e^{x^2} + c$ d) $4e^{x^2} + c$

Trouvez les intégrales suivants:

5. $\int e^{4x}\, dx$
6. $\int (3x^2 + 2e^{x})\, dx$
7. $\int (\frac{4}{x} - e^{-x})\, dx$
8. $\int e^{1-3x}\, dx$
9. $\int \frac{7}{3} e^{3x-4}\, dx$
10. $\int 2e^{x}(e^{x}+1)^2\, dx$
11. $\int \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 4}{e^{x}}\, dx$
12. $\int x^2 e^{x^3+1}\, dx$
13. $\int \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\, dx$
14. $\int \frac{dx}{4x-1}$
15. $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$
16. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx$
17. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx$
18. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$
19. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x - 1}\, dx$
20. $\int \frac{1}{(x \ln x)}\, dx$
21. $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\, dx$
22. $\int \frac{(\log x)^2}{x}\, dx$
23. $\int \frac{3x^2}{x^3 - 1}\, dx$
24. $\int \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x + 1}\, dx$
25. $\int \frac{4e^{x} + x\, e^{2x}}{x\, e^{x}}\, dx$
26. $\int \frac{4}{x \ln 3x}\, dx$
27. $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\, dx$

28. Applications géométriques : Si la pente de la tangente de la courbe de la fonction f en un point (x , y) est égale à $2e^{-\frac{1}{2}x}$, $f(0) = 1$, trouvez $f(3)$

Résumé de l'unité

Le nombre e Le nombre e est défini par la relation

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad , \quad e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

fonction exponentielle de base népérien est une fonction exponentielle de base e où $f(x) = e^x \; , \; x \in \mathbb{R}$

fonction de logarithme népérien est une fonction logarithmique de base e où $f(x) = \ln x$ et $x \in \mathbb{R}$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

Fonction	dérivée de la fonction	condition
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	f est dérivable
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0 \; , \; a \neq 1$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\ln \lvert f(x) \rvert$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	f est dérivable , $f(x) \neq 0$

Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

Fonction	intégral de la fonction	condition
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
e^{kx}	$\frac{1}{k} e^{kx} + c$	$k \neq 0$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)} + c$	f est dérivable
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$	$x \neq 0$
$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	$\ln \lvert f(x) \rvert + c$	f est dérivable , $f(x) \neq 0$

Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1. La courbe de la fonction $f(x) = e^{x-3} + 2$ est l'image de la courbe de la fonction $g(x) = e^x$ par la translation :
   - a) (2 ; 3) b) (2 ; -3) c) (3 ; -2) d) (3 ; 2)

2. Si $f'(x) = x\, f(x)$, $f(3) = -5$, alors : $f''(3)$ est égale à:
   - a) -50 b) -40 c) 15 d) 27

3. $\int \frac{\ln x^2}{\ln x}\, dx$ est égale à:
   - a) $\frac{x}{2} + c$ b) $\frac{1}{x} + c$ c) $2x + c$ d) $\log_e |x| + c$

4. $\int \frac{1}{x \ln x^3}\, dx$ est égal à:
   - a) $3\ln |x| + c$ b) $3\ln |\ln x| + c$ c) $\frac{1}{3} \ln |x| + c$ d) $\frac{1}{3} \ln |\ln x| + c$

Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

5. $\log (x - 3) = 2$
6. $\log_2 (x + 7) = 5$
7. $e^{5x+1} = 20$
8. $\ln 4^{2x-1} = \ln 50$
9. $\ln e^x = 2 \ln 3$
10. $7^x = 25$

Trouvez chacune des limites suivantes :

11. $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{2}{n})^{3n}$
12. $\lim_{x \to \infty} (\frac{n}{n+1})^n$
13. $\lim_{x \to \infty} (\frac{2x-1}{2x+1})^{2x}$

Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

14. $y = 7e^x - 3$
15. $y = e^{3x^2+1}$
16. $y = x^2 e^{-3}$
17. $y = \ln (x^2 + 3)$
18. $y = x \ln x^2$
19. $y = e^x \ln (x^2 + 1)$
20. $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$
21. $y = x^2 \ln e^x$
22. $y = \frac{1}{x} \ln e^x$

Dans ce qui suit, trouvez $\frac{d^2 y}{d x^2}$:

23. $x = e^{2n}$, $y = e^{3n}$
24. $x = n^3$, $y = 4 \ln n$

Dans ce qui suit, trouvez $\frac{d^3y}{dx^3}$:

25. $y = \ln x$
26. $y = x^3 + e^{2x}$
27. $y = x \log x$

28 Si $e^{xy} = x^2 + y$, démontrez que : $(x e^{xy} - 1) y' = 2x - y e^{xy}$

29 Si $x^2 y = a b \ln x$, démontrez que : $x^2 y'' + 5x y' + 4y = 0$

Dans ce qui suit, trouvez $\frac{dy}{dx}$:

30 $y = 2^x (x + 1)$

31 $y = 3x^{x^2} + 3$

32 $y = (1 - 3x)^{\cos x}$

33 $y = x^{e^x}$

Trouvez les valeurs de x auxquelles la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses où $x > 0$

34 $y = x^3 \ln x$

35 $y = \frac{1}{x^2} \ln x^2$

36 $y = x^3 - 81 \ln x$

37 $y = 3 - \frac{x^2}{4} + \ln \frac{x}{2}$

38 Si $x e^{-\frac{1}{2}y} + y e^{-\frac{x}{2}} = 2$, Trouvez $\frac{dy}{dx}$ quand $x = 0$

Trouvez les intégrales suivants:

39 $\int \frac{9 + 6x}{x^2 + 3x} \, dx$

40 $\int \frac{\ln x}{x \ln \sqrt{x}} \, dx$

41 $\int (\frac{3}{x} + 4e^{-2x}) \, dx$

42 $\int (\frac{e^3}{x} + x \ln 3) \, dx$

43 $\int (x^3 - \frac{2}{3} e^x) \, dx$

44 $\int \cot g^3 x \, dx$

45 **Intersection avec les axes :** Si la tangente de la courbe $y = e^x$ au point $(2 , e^2)$ coupe l'axe des abscisses au point A et l'axe des ordonnées au point B , trouvez la longueur de $\overline{AB}$

46 **Equations de la tangente et de la normale :** Trouvez les équations de la tangente et de la normale de la courbe $y = x^3 - 18 \ln x$ en un point de la courbe dont l'abscisse est 2.

47 **La proportionnalité inverse :** Si la pente de la tangente de la courbe en un point (x ; y)de la courbe est inversement proportionnelle à x . Si la pente de la tangente est 2 quand x = 4 et y = 2. Trouvez y en fonction de x.

48 **Parallélisme :** Trouvez les valeurs de x (à deux décimales près) auxquel les la tangente de la courbe $y = \frac{1}{x^2} \ln x^2$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Pour plus d'activités et des exercices : visite le site électronique www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulative

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

1) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ est égale à :

a) 1 b) e c) e^2 d) e^{-2}

2) $m = e^{\ln 7}$, alors m est égale à:

a) 1 b) $\frac{1}{e}$ c) e d) 7

3) L'ensemble solution de l'équation est $\ln(x - 3) + \ln(x - 2) = \ln 6$ est égal à:

a) $\{0 , 5\}$ b) $\{5\}$ c) $\{2 , 3\}$ d) ϕ

4) Si $f(x) = x^2 - 3 \ln 5x$, alors $f'(2)$ est égale à :

a) -1 b) 1 c) $\frac{5}{2}$ d) 6

Répondez aux questions suivantes :

5) Dans ce qui suit, trouvez la première dérivée :

a) $y = (x^3 + 1)^2$ b) $y = \ln x^2 - e^{\frac{1}{4}x}$ c) $y = \ln\left[\frac{e^{x^2}}{x^2}\right]$

6) Si $y = e^{3x} + x^2$, démontrez que : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 = 9(y - x^2)$

7) Trouvez les intégrales suivants:

a) $\int \frac{2x^2 + 3}{x} \, dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}$ c) $\int \frac{3}{2x \ln x} \, dx$

8) Si la pente de la tangente à la courbe de la fonction f à tout point (x , y) de la courbe est égale à $7 - 2e^x$ et $f(\ln 2) = 3$, Trouvez f(x).

Si vous ne pouvez pas répondre à une question, vous pouvez vous guider par le tableau suivant :

Question no	1	2	3	4	5	6	7	8
Voir	1	1	1	2	2	2	3	3

Unité 3

Comportement d'une fonction et tracé de la courbe

Introduction de l'unité

A partir de la représentation graphique de la courbe d'une fonction, vous pouvez déterminer ses intervalles de monotonie (croissante, décroissante, constante), savoir les valeurs maximales et les valeurs minimales de la fonction et quelques propriétés de cette fonction. En utilisant un logiciel de graphisme, vous pouvez dessiner la fonction et étudier son comportement. Cependant, ceci n'est pas toujours disponible.

Dans cette unité, vous allez savoir plus de techniques dans le dessin de la courbe de la fonction à partir du calcul différentiel et en utilisant les dérivés de cette fonction (première dérivé et deuxième dérivé) pour déterminer ses intervalles de croissance et décroissance, les valeurs maximales et minimales en fonction de la valeur x (valeurs maximales et minimales relatives) et les valeurs maximales et minimales absolues d'une fonction continue sur] a ; b[et la convexité de la courbe de la fonction (vers le haut et vers le bas) ainsi que l'étude de quelques applications pour trouver les valeurs maximales et minimales afin de vous aider à modéliser et résoudre les problèmes mathématiques, physiques, et vitales.

Objectifs de l'unité

A l'issue de cette unité, l'élève doit être capable de :

- Utiliser la dérivée première pour étudier la croissance et décroissance d'une fonction dérivable
- Déterminer les valeurs maximales et minimales relatives d'une fonction dérivable
- Déterminer les valeurs maximales et minimales absolues d'une fonction dans un intervalle fermé.
- Trouver les points critiques، les points d'inflexions et la convexité vers le haut et vers le bas.
- Trouver la relation entre la courbe d'une fonction et la dérivée première.

Etudier le comportement d'une fonction (la monotonie, valeurs maximales et minimales à l'aide de la dérivée première

- Tracer les courbes des fonctions polynômes jusqu'au troisième degré seulement.

Vocabulaires de base

- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Valeurs maximales et minimales
- Valeurs extrémales
- Point critique
- Valeur minimale relative
- Valeur maximale relative
- Valeur extrémale relative
- Valeur extrémale absolu
- convexité
- convexité vers le haut
- convexité vers le bas
- point d'inflexion

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1): Croissance et décroissance des fonctions.

Leçon (3 - 2): Valeurs maximales et minimales.

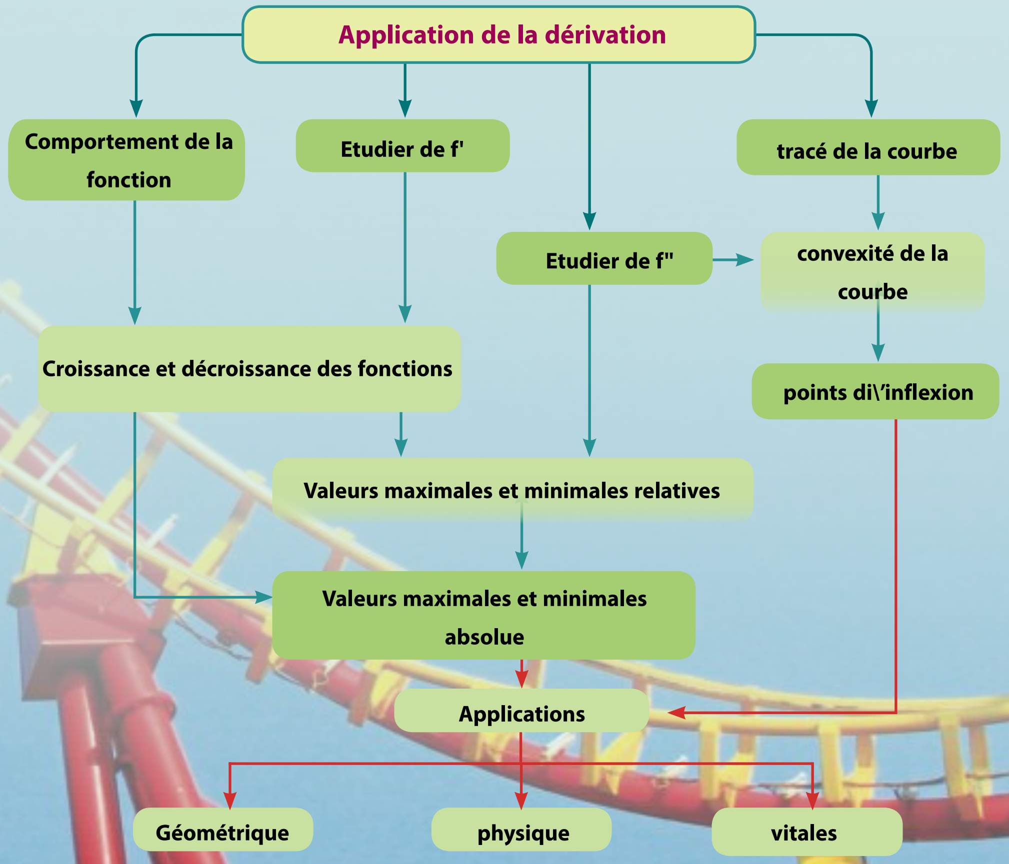
Leçon (3 - 3): Tracé de la courbe.

Leçon (3 - 4): Applications sur les valeurs maximales et minimales.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Organigramme de l'unité



3 - 1 Croissance et décroissance des fonctions

A apprendre

- Utilisation de la dérivée première pour déterminer les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction.
- Applications de la vie sur les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction.

Vocabulaires de base

- Fonction croissante
- Fonction décroissante

Aides pédagogiques

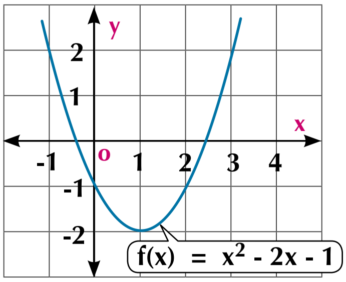
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Réfléchissez et discutez

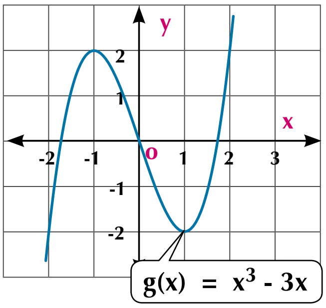
Les figures suivantes montrent les courbes des fonctions f et g où

$f(x) = x^2 - 2x - 1$,

$g(x) = x^3 - 3x$



- Déterminez les intervalles de croissance et décroissance de la fonction f
- Trouvez la dérivée première de la fonction f puis étudiez le signe de f'(x) pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle de croissance
- Etudiez le signe de f'(x) pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle de décroissance



Répétez les étapes précédentes pour déterminer le signe de g'(x) dans les intervalles de croissance et décroissance de la fonction g. Que pouvez-vous déduire ?

Quel est la nature de l'angle que fait la tangente de la courbe aux points d'abscisses x dans les intervalles de croissance avec la direction positive de l'axe des abscisses ?

A apprendre

Etude de la monotonie d'une fonction à l'aide de la dérivée première

Théorème

Soit une fonction f dérivable sur] a , b [:

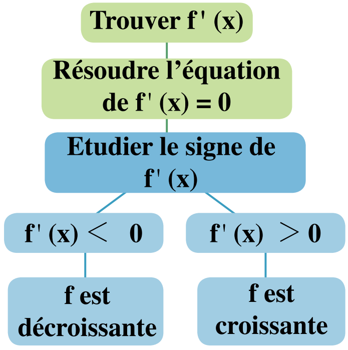
1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$

alors f est croissante dans] a , b [

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$

alors f est décroissante dans] a , b [

Etude de la monotonie d'une fonction



Exemple

Détermination des intervalles de croissance et décroissance

(1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Solution

$\because f(x) = x^3 - 3x + 2$ est continue et dérivable dans R

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

On pose $f'(x) = 0$ $\quad \therefore 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ quand $x = -1$ et $x = 1$ $\therefore$ Le domaine de la fonction est partagé en 3 intervalles

On étudie le signe de f' dans ces intervalles comme montre le tableau suivant :

f est croissante dans $]-\infty, -1[$

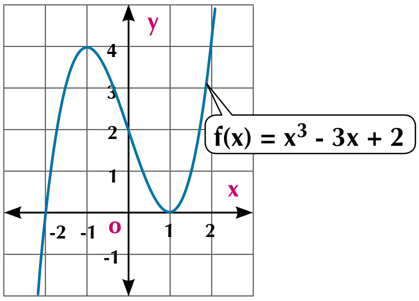
f est décroissante dans $]-1, 1[$

f est croissante dans $]1, \infty[$

x	$-\infty$		-1		1		∞
Signe de f' (x)	0	+		-	0	+	
Comportement de f (x)		↗		↘		↗	

Remarquez que :

1) Quand on utilise l'un des programmes pour tracer la courbe représentative de la fonction (la figure ci-contre) On trouve que le comportement de la fonction correspond au résultat obtenu dans le tableau.



2) La tangente de la courbe fait un angle aigu avec la direction positive de l'axe des abscisses dans les intervalles de croissances et un angle obtus avec la direction positive de l'axe des abscisses dans les intervalles de décroissances.

3) Les valeurs qui séparent les intervalles de croissance et de décroissance sont les valeurs auxquelles la dérivée première est nulle ou indéfinie.

Essayez de résoudre

(1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de chacune des fonctions suivantes:

a $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ **b** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Exemple

Fonctions trigonométriques

(2) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x + 2\sin x$, $0 < x < 2\pi$

Solution

f est continue et dérivable dans $]0, 2\pi[$

$\therefore f'(x) = 1 + 2\cos x$

x	$-\infty$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		∞
Signe de f' (x)		+	0	-	0	+	
Comportement de f (x)		↗		↘		↗	

Etude de $f'(x)$

$1 + 2\cos x = 0 \qquad \therefore \cos x = -\frac{1}{2}$

$\because x \in]0, 2\pi[\qquad \therefore x = \frac{2\pi}{3}$ or $x = \frac{4\pi}{3}$

Remarquez que :

En $x = \frac{\pi}{2}$ $f'(x) = 1 > 0$ $\therefore$ f est croissante dans $]0, \frac{2\pi}{3}[$

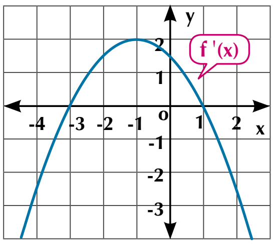
En $x = \pi$ $f'(x) = -1 < 0$ $\therefore$ f est décroissante dans $]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$

En $x = \frac{3\pi}{2}$ $f'(x) = 1 > 0$ $\therefore$ f est croissante dans $]\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$

Essayez de résoudre

2) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x - 2\cos x,\ 0 < x < 2\pi$

Réflexion critique : La figure ci-contre montre la courbe représentative de f'(x) de la fonction f où f(x) est un polynôme.



a) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f

b) Trouvez l'ensemble solution de l'inéquation $f''(x) > 0$

Exemple

3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction g où $g(x) = 2\ln x - x^2$

Solution

g (x) est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$g'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1 - x^2)}{x}$$

x	0	1	∞
Signe de g'(x)	+	0	-
Comportement de g(x)	↗		↘

Etude du signe de $g'(x)$

Si $g'(x) = 0$ $\therefore$ $x = 1$ ou $x = -1 \notin \mathbb{R}^+$

Si $x < 1$ $\therefore$ $g'(x) > 0$ d'où g est croissante dans $]0, 1[$

Si $x > 1$ $\therefore$ $g'(x) < 0$ d'où g est décroissante dans $]1, \infty[$

Essayez de résoudre

3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = x - e^x$ et en utilisant le programme GeoGebra, tracez la courbe représentative de la fonction f puis vérifiez la réponse.

Exercices 3 - 1

Dans ce qui suit, déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f:

1. $f(x) = x^2 - 4x$
2. $f(x) = (x-3)^2$
3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
4. $f(x) = 9x - x^3$
5. $f(x) = x^4 + 4x$
6. $f(x) = 2 - 3(x-2)^{\frac{4}{3}}$
7. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$
8. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
9. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$
10. $f(x) = x + \ln x$
11. $f(x) = 3 - \ln x^2$
12. $f(x) = 5 - 2e^{2x}$

Répondez aux questions suivantes :

13. Démontrez que la fonction f où $f(x) = \tan x - x$ est croissante dans $]0 ; \frac{\pi}{4}[$
14. Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f où $f(x) = 1 - \sin x$, $0 < x < 2\pi$
15. Si f et g sont deux fonctions dérivables $f'(x) < g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, démontrez que la fonction h où $h(x) = f(x) - g(x)$ est décroissante pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 - 2 Valeurs maximales et minimales (Valeurs extrémales)

A apprendre

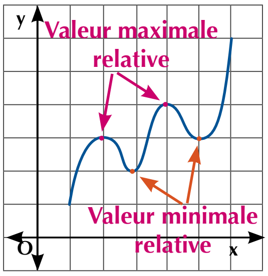
- Point critique
- Valeurs maximales et minimales relatives d'une fonction.
- Etude de la dérivée première des valeurs maximales et minimales relatives.
- Trouver les valeurs extrémale d'une fonction dans un intervalle fermé.

Vocabulaires de base

- Point critique
- Valeurs maximales relatives
- Valeurs minimales relatives
- Valeurs extrémale absolues

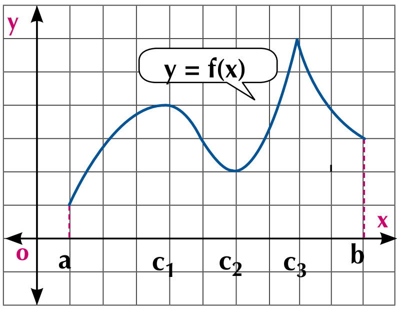
Aides pédagogiques

- calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



Réfléchissez et discutez

Soit f une fonction continue dans [a , b], la figure ci-contre représente la courbe de la fonction f



1- Déterminez les intervalles de croissance et décroissance de la fonction f

2- Si $x = c_1$, quelle est la valeur de $f'(c_1)$? Décrivez le comportement de f dans $]a , c_2[$. $f(c_1)$ est-il la plus grande valeur de f dans $]a , c_2[$?

3- Si $f'(c_2)$ quelle est la valeur de $f = c_2$? Décrivez le comportement de f dans $]c_1, c_3[$. $f(c_2)$ est-il la plus petite valeur de f dans $]c_1 , c_3[$?

4- Pouvez-vous trouver $f'(c_3)$? Expliquez vos réponse.
Décrivez le comportement de f dans $]c_2, b[$. $f(c_3)$ est-il la plus grande valeur de f dans $]c_2 , b[$?

Définition

Point critique

Soit f une fonction continue dans]a ; b[, on dit que $(c , f(c))$ est un point critique s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes $c \in]a , b[$, $f'(c) = 0$ ou f n'est pas dérivable en $x = c$.

De la figure précédente, on déduit que : $(c_1 ; f(c_1))$ et $(c_2 ; f(c_2))$ sont des points critiques car $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ ainsi que $(c_3 ; f(c_3)$ est un point critique car f est continue en $x = c_3$ et n'est pas dérivable (dérivée à droite ≠ dérivée à gauche).

Définition

Valeurs maximale et minimale relatives

Soit f une fonction contenue dans un intervalle I, $c \in I$,

Si $f(x) \leqslant f(c)$ pour tout $x \in]a , b[$ où $]a , b[\subset I$:

alors f atteint une valeur maximale relative en $x = c$

Si $f(x) \geqslant f(c)$ pour tout $x \in]a , b[$ où $]a , b[\subset I$:

alors f atteint une valeur minimale relative en $x = c$

Remarquez que :

Dans le paragraphe réfléchissez et discutez: en $x = c_1$ et $x = c_3$ la fonction atteint des valeurs maximales relatives c_2 et en $x = c_2$, la fonction atteint une valeur minimale relative

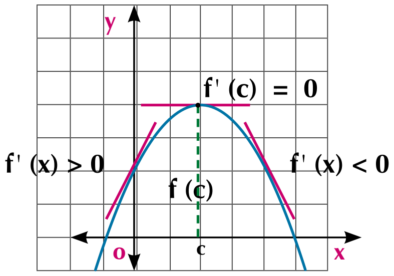
Etude de la dérivée première pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives

A apprendre

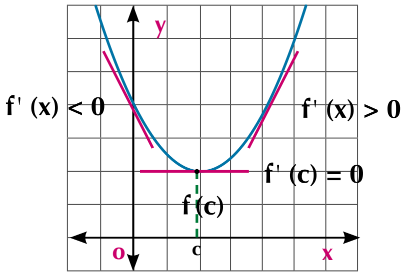
Si f(x) est contenue en x = c et (c ; f(c)) est point critique où c ∈ un intervalle ouvert contenant c:

1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x < c$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors f (c) est une valeur maximale relative

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x < c$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x > c$, alors f (c) est une valeur minimale relative



f (c) est une valeur maximale relative en c



f (c) est une valeur minimale relative en c

3- Si le signe de f '(x) ne change pas au voisinage de c, alors la fonction n’atteint ni de valeur maximale ni de valeur minimale relative.

Théorème

Si f est dérivable dans] a ; b [et elle atteint une valeur maximale ou minimale relative en c ∈]a , b[alors f '(c) = 0.

Etude de la dérivée première

Exemple

(1) Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$, trouvez les valeurs maximales ou minimales relatives de f

Solution

1) Détermination des points critiques : f est continue et dérivable

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$

pour $f'(x) = 0$

$\therefore x = -3$ ou $x = 1$

(-3 , f (-3)) , (1 , f (1))

sont deux points critiques

Les points critiques sont : (-3 , 20) , (1 , -12)

Déterminez les points critiques ⟶ **étudiez le signe de f '(x)** ⟶ **+ → - maximale rerlative** / **- → + minimale relative**

2) Le tableau ci-contre montre l'étude de la dérivée première

x	$-\infty$		-3		1		∞
Signe de f' (x)		+	0	-	0	+	
Comportement de f (x)		↗	20	↘	-12	↗	

3) Au voisinage de $x = -3$

le signe de f' (x) change de positif (avant $x = -3$) au négative (après $x = -3$)

$\therefore\ f(-3) = 20$ valeur maximale relative.

Au voisinage de $x = 1$ le signe de f' (x) change de négatif (avant $x = 1$) au positif (après $x = 1$)

$\therefore\ f(1) = -12$ valeur minimale relative

Essayez de résoudre

1 Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$, trouvez les valeurs maximales ou minimales relatives de f

Exemple

La première dérivée n'existe pas

2 Trouvez les valeurs maximales ou minimales relatives de f si $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x - 5)$

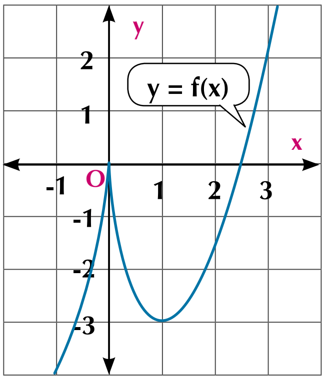
Solution

La fonction f est continue dans son domaine $x \in \mathbb{R}$

1) Détermination des points critiques:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x - 5) + 2x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2[2x - 5 + 3x]}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \qquad x \neq 0$$



$\because$ f est continue en $x = 0$, f' (0) n'existe pas

$\therefore$ f a un point critique $(0, f(0)) = (0, 0)$

$f'(x) = 0$ pour $x = 1 \therefore$ f a un point critique qui est $(1, f(1))$ c-a-d. $(1, -3)$ comme indique la figure ci-contre .

2) Le tableau ci-contre montre l'étude de la dérivée première.

x	$-\infty$		0		1		∞
Signe de f' (x)		+	n'existe pas	-	0	+	
Comportement de f (x)		↗		↘	-3	↗	

3) En $x = 0$ il y a une valeur maximale relative $= 0$

En $x = 1$, il y a une valeur minimale relative $= -3$

Essayez de résoudre

2 Démontrez que la fonction f où $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ atteint une valeur minimale relative.

Réflexion critique: La fonction f où $f(x) = x^3 + 3x - 4$ atteint-elle une valeur maximale ou minimale relative ?.

Exemple Fonctions rationnelles

(3) Déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = x + \frac{4}{x}$

Solution

Le domaine de la fonction $f = \mathbb{R} - \{0\}$

1) Détermination des points critiques : $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ La fonction atteint deux points critiques (2, f(2)) , (-2, f (-2)) c-a-d. (2 , 4) , (-2 , -4).

2) Le tableau ci-contre montre l’étude de la dérivée première (Notez que x = 0 ∉ domaine de la fonction).

3) En x = -2 il y a une valeur maximale relative = -4

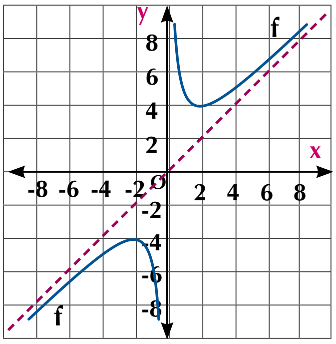
En x = 2 il y a une valeur minimale relative = 4

x	-∞		-2		0	2		∞
Signe de f' (x)		+		-	‖	-		+
Comportement de f (x)		↗	-4	↘	‖	↘	4	↗

Notez que : valeur maximale est plus petite que la valeur minimale

Technologie : La figure ci-contre représente la courbe représentative de la fonction f en utilisant l’un des programmes.

Comparez entre le tableau des signes et sa courbe. Que remarquez-vous ?



Essayez de résoudre

(3) Déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$

A apprendre

Les valeurs extrémales d’une fonction dans un intervalle fermé

Définition des valeurs extrémales :

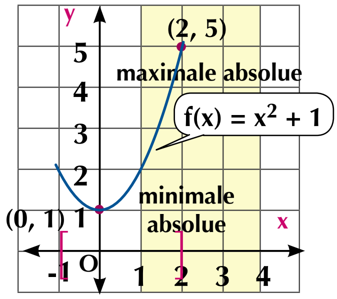
Soit f une fonction définie dans l’intervalle fermé [a , b] et c ∈ [a , b]

1) Si $f(c) \leqslant f(x)$ pour tout x ∈ [a , b] alors f (c) est une valeur minimale relative dans [a ; b]

2) Si $f(c) \geqslant f(x)$ pour tout x ∈ [a , b] alors f (c) est une valeur minimale relative dans [a ; b]

➲ La valeur minimale et la valeur maximale d’une fonction sont appelées les valeurs extrémales de la fonctions dans cet intervalle.

➲ La valeur extrémale peut être en un point à l’intérieur de l’intervalle ou en extrémités de l’intervalle

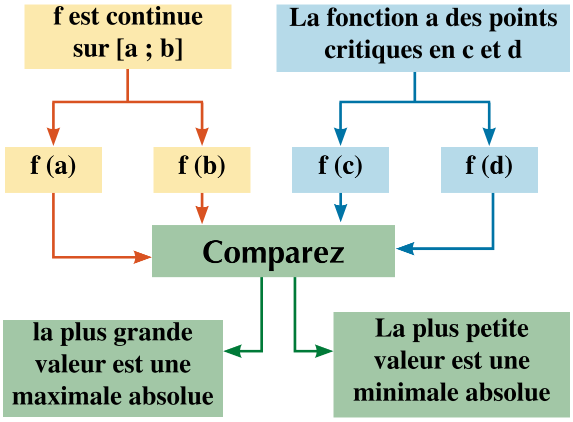


Théorème

Si la fonction est continue dans [a ; b], alors la fonction atteint une valeur maximale absolue et une valeur minimale absolue dans [a ; b].

Pour trouver les valeurs extrémales absolues de la fonction f dans [a ; b], on suit les étapes suivantes:

- On calcule f (a) , f (b) , et la valeur de la fonction pour chaque point critique.
- On compare les valeurs précédentes; la plus grande de ces valeurs est la valeur maximale absolue et la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale absolue.



Exemple

(4) Déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f où $f(x) = x^3 - 12x + 12$, $x \in [-3 , 3]$

Solution

$\because\ f(x) = x^3 - 12x + 12 , x \in [-3 , 3]$

$\therefore\ f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 12 = 21$ **(1)**

$, f(3) = (3)^3 - 12(3) + 12 = 3$ **(2)**

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x - 2)$

Pour déterminer les points critiques, on pose $f'(x) = 0$

$\therefore\ x = 2 \in [-3 , 3]$ ou $x = -2 \in [-3 , 3]$

En $x = 2$ il existe un point critique et $f(2) = -4$ **(3)**

En $x = -2$ il existe un point critique et $f(-2) = 28$ **(4)**

D'après 1 ; 2 ; 3 ; 4, la valeur maximale absolue est 28; - 4 est la valeur minimale absolue

Essayez de résoudre

(4) Déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f où

a $f(x) = 10x\, e^{-x} \quad x \in [0 , 4]$

b $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, x \in [-1 , 3]$

Remarquez que :

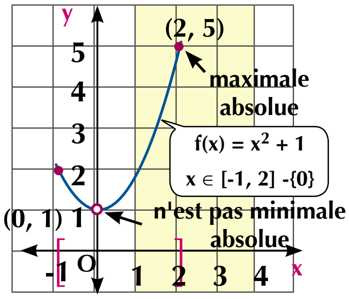


Figure (1)

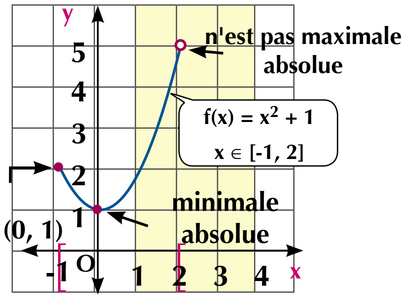
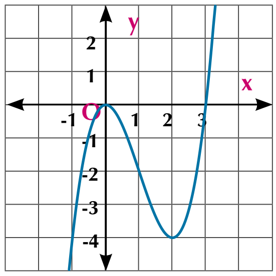
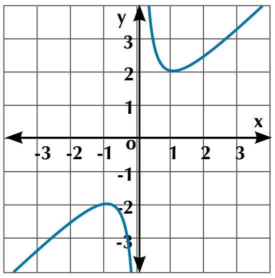


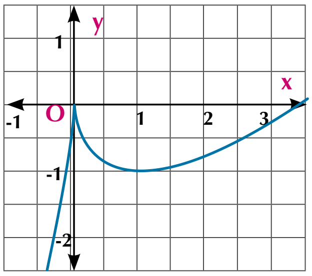
Figure (2)

Exercices 3 - 2

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives (s'elles existent) de la fonction f en déterminant sa nature:

1


2


3


Dans ce qui suit, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives (s'elles existent) de la fonction f en déterminant sa nature.

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$
5. $f(x) = x^4 - 2x^2$
6. $f(x) = 4x - x^3$
7. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
8. $f(x) = 3 - x^{\frac{2}{3}}$
9. $f(x) = (x + 2)^{\frac{2}{3}}$
10. $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$
11. $f(x) = x + \frac{4}{x - 1}$
12. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$
13. $f(x) = 4\,e^{-x^2}$
14. $f(x) = e^{x}(3 - x)$
15. $f(x) = e^{x} + e^{-x}$
16. $f(x) = x - \ln x$
17. $f(x) = 8\ln x - x^2$
18. $f(x) = (x - 1)\ln x$

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f dans l'intervalle donné:

19. $f(x) = x^3 - 3x + 1,\ x \in [-2,\ 1]$
20. $f(x) = \sqrt{x - 1},\ x \in [2,\ 5]$
21. $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in [0,\ 2\pi]$
22. $f(x) = x\,e^{-x},\ x \in [0,\ 2]$

Répondez à la question suivante :

23. Réflexion créative : Si la courbe représentative de la fonction $f(x) = ax^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ vérifie les conditions suivantes à la fois :

- a) passe par le point d'origine.
- b) atteint un point critique en $x = 1$
- c) l'équation de la tangente au point (2 ; f(2)) qui lui appartient est $9x + y = 20$ Trouvez les valeurs de a ; b ; c et d.

3 - 3 Tracé de la courbe représentative d'une fonction

A apprendre

- Détermination les intervalles de convexité de la courbe d'une fonction vers la haut et vers le bas
- Trouver les points d'inflexion de la courbe d'une fonction
- L'étude de la deuxième dérivée pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives

Vocabulaires de base

- Convexité
- Convexité vers le haut
- Convexité vers le bas
- point d'inflexion

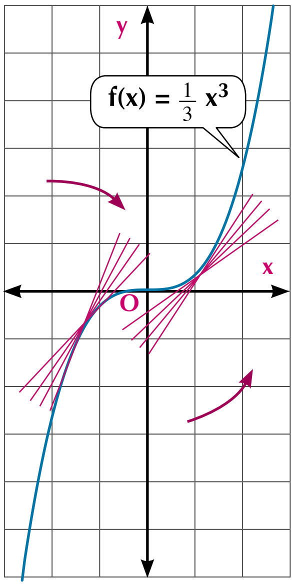
Aides pédagogiques

- calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Découvrez

La figure ci-contre montre la courbe représentante la fonction f où $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in \mathbb{R}$

Remarquez que la fonction est croissante dans $\mathbb{R}$. Pourquoi ?



La direction de la convexité de la courbe dans l'intervalle]-∞ ; 0[est-elle différente de celle dans l'intervalle] 0 ; ∞ [?

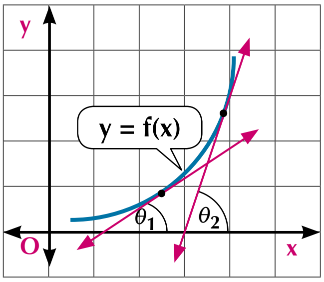
Quelle est la position de la courbe de la fonction par rapport à ses tangentes dans l'intervalle]-∞ ; 0[. Est-ce que la pente de la tangent f '(x) croit ou décroit en croissance de x ? Que pouvez-vous déduire ?

Quelle est la position de la courbe de la fonction par rapport à ses tangentes dans l'intervalle]0 ; ∞[. Est-ce que la pente de la tangent f '(x) croit ou décroit en croissance de x ? Que pouvez-vous déduire ?

Convexité des courbes

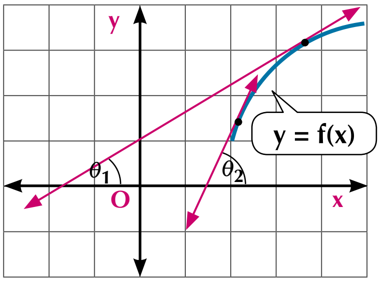
Définition

Soit f une fonction dérivable dans] a , b [, la courbe de la fonction est convexe vers le bas si f ' est croissante dans cet intervalle et convexe vers le haut si f ' est décroissante dans cet intervalle.



La courbe est convexe vers le bas. f ' est croissante et sa dérivée est positive

f'' (x) > 0



La courbe est convexe vers le haut. f ' est décroissante et sa dérivée est négative

f'' (x)< 0

Si la deuxième dérivée d'une fonction n'est pas nulle, on peut étudier la monotonie de la première dérivée f '(x) et déterminer les intervalles de convexité de la courbe de la fonction f

Etude de la deuxième dérivée pour déterminer la convexité d'une courbe

Théorème

Soit f une fonction dérivable deux fois dans]a ; b[

1- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a\,;\,b[$, alors la courbe de la fonction est convexe vers le bas dans]a , b[

2- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a\,;\,b[$, alors la courbe de la fonction est convexe vers le haut dans]a , b[

Exemple

Détermination des intervalles de la convexité d'une fonction polynôme

1) Soit $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$. Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas de la courbe représentante f.

Solution

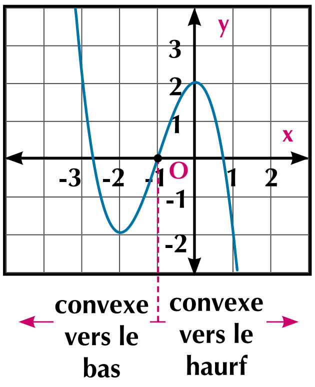
f est contenue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -6x - 3x^2$, $f''(x) = -6 - 6x = -6(1 + x)$

$f''(x) = 0$ pour $x = -1$

Le tableau ci-contre montre: le signe de f '' et les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas de la courbe représentante de la fonction f

x	-∞	-1	∞
signe de f''	+	0	-
convexité de la courbe	∪		∩



La courbe de la fonction est convexe vers bas dans l'intervalle]-∞ , -1[et est convexe vers le haut dans l'intervalle] -1 , ∞[

Essayez de résoudre

1) Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas de chacune des courbes représentantes chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $g(x) = x^4 - 4x^3$

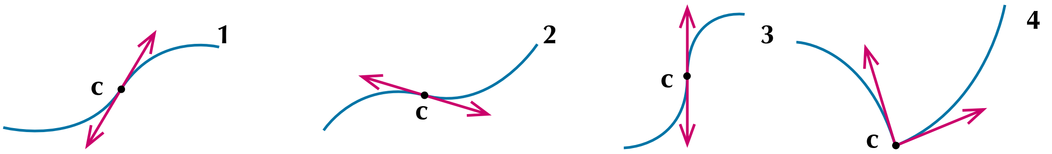
Technologie: En utilisant l'un des logiciels de graphisme, tracez la courbe représentante des deux fonctions f et g où $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Déterminez les intervalles de convexité vers la haut et vers le bas puis vérifiez la réponse en utilisant l'étude de la deuxième dérivée.

Remarquez que : la direction de convexité est variable de haut vers le bas ou de bas vers le haut en un point auquel la dérivée seconde est nulle ou n'existe pas.

Définition

Point d'inflexion

Soit f une fonction continue dans]a , b[, c ∈] a , b[et une tangente de la courbe passe par le point (c ; f(c)). Ce point est appelé point d'inflexion de la courbe s'il change de convexité.



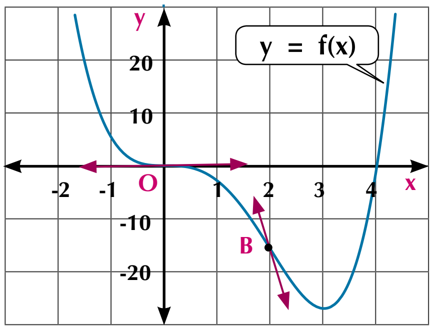
Pour les courbes 1 ; 2 ; et 3, il existe des points d'inflexion car la courbe est située de part et d'autre de la tangente passant par le point C

pour la courbe 4, il n'existe pas du point d'inflexion car au point C ne passe pas une tangente

Remarquez que:

1- La tangente au point d'inflexion coupe la courbe de la fonction car la courbe est située de part et d'autre de la tangente passant par le point d'inflexion.

2- **Dans la figure ci-contre** Il existe deux points d'inflexion de la courbe de la fonction f au point d'origine (0, 0) et l'autre au point B (2, f(2)).



Exemple

Convexité et point d'inflexion

(2) Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{Si } x < -2 \\ x^3 - 3x + 2 & \text{Si } x \geqslant -2 \end{cases}$

Déterminez les intervalles de convexité de sa courbe, trouvez les points d'inflexion et l'équation de la tangente. en ces points si elles existent.

Solution

La fonction f est définie par deux règles, son domaine est R. Elle est continue en x = -2

$f(-2)^- = f(-2)^+ = f(-2) = 0$

$$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(-2+h)^2 - 4 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h - 4) = -4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to o+} \frac{(-2+h)^3 - 3(-2+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h\to o+} (h^2 - 6h + 9) = 9$$

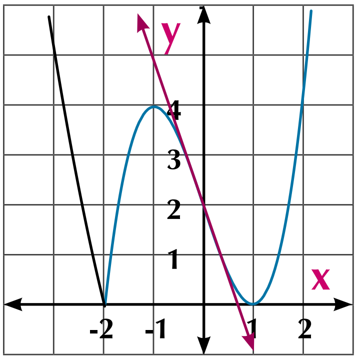
$\because f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$ $\therefore$ la fonction n'est pas dérivable en x = -2

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{Si } x < -2 \\ 3x^2 - 3 & \text{Si } x > -2 \\ \text{n`existe pas} & \text{Si } x = -2 \end{cases} \qquad [f'(-2^-) \neq f'(-2^+)]$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si } x < -2 \\ 6x & \text{Si } x > -2 \end{cases}$$

Le tableau suivant montre le signe de f '' et les intervalles de convexité de la courbe de la fonction.

x	-∞	-2	0	∞
Signe de f''	+	n'existe pas	-	+
Convexité de la courbe	◡		◠	◡



Intervalles de convexité : la courbe est convexe vers le bas dans]-∞ ; -2[,] 0 ,∞ [et ver le haut dans]-2, 0[

Point d'inflexion :

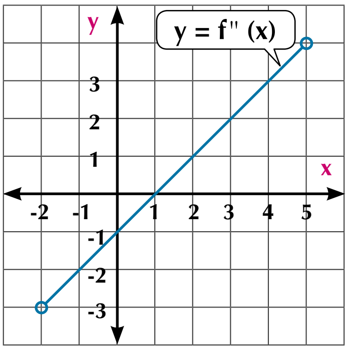
- Le point (-2 ; f(-2)) = (-2 ; 0) n'est pas un point d'inflexion bien que la courbe change de convexité car il n'y a pas de tangente en ce point (f '(x) n'existe pas)
- Le point (0 ; f(0)) = (0; 2) est un point d'inflexion car la courbe est située de part et d'autre de la tangente qui la coupe en ce point dont la pente = - 3 et son équation est y – 2 = 3x (comme montre la figure)

Essayez de résoudre

2) Soit $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{Si } x < -1 \\ 3x^2 - x^3 & \text{Si } x \geqslant -1 \end{cases}$

Déterminez les intervalles de convexité de sa courbe, trouvez les points d'inflexion et l'équation de la tangente en ces points.

Réflexion critique: La figure ci-contre représente la courbe de f ''(x) dans] -2; 5[de la fonction continue f.



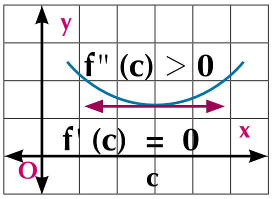
- Déterminez les intervalles de convexité de la courbe de la fonction f s'ils existent.
- Y a –t-il des points d'inflexion de la courbe de la fonction f ? Expliquez la réponse.

Etude de la deuxième dérivée pour les valeurs maximales ou minimales relatives

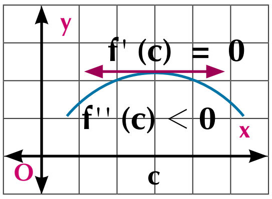
Théorème

Soit la fonction f dérivable deux fois sur un intervalle ouvert contenant c où f '(c) = 0

1) **Si f'' (c) < 0 alors f(c) est une valeur maximale relative.**
2) **Si f'' (c) > 0 alors f(c) est une valeur minimale relative.**
3) **Si f'' (c) = 0 alors l'étude de la deuxième dérivée n'est pas suffisante pour déterminer la nature du point (c ; f(c)) (soit maximale ou minimale).**



f (c) est une valeur minimale relative



f (c) est une valeur maximale relative

Exemple

3 En utilisant la deuxième dérivée, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

Solution

Comme f est une fonction polynôme, donc elle est continue dans $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$, $\quad f''(x) = 12x^2 - 16$

$f'(x) = 4x(x^2 - 4) = 0$ la fonction a des points critiques en $x = 0, x = 2, x = -2$

Étude de la deuxième dérivée pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives:

En $x = 0$ $\quad f''(0) = -16 < 0$ $\quad \therefore f(0) = 10$ valeur maximale relative

En $x = 2$ $\quad f''(2) = 32 > 0$ $\quad \therefore f(2) = -6$ valeur minimale relative

En $x = -2$ $\quad f''(-2) = 32 > 0$ $\quad \therefore f(-2) = -6$ valeur minimale relative

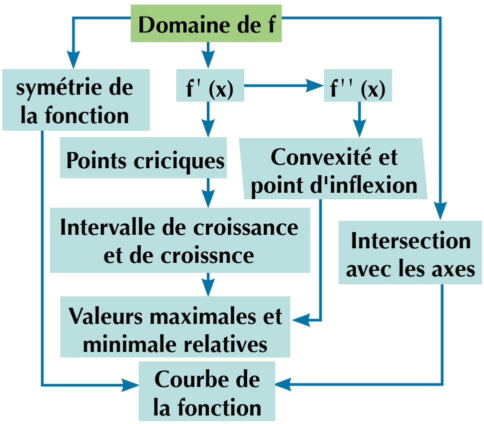
Essayez de résoudre

3 En utilisant la deuxième dérivée, déterminez les valeurs maximales et minimales relatives de la fonction f où $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ Vérifiez la réponse en utilisant une calculatrice scientifique ou un logiciel de graphisme.

Tracé de la courbe représentative d'une fonction polynôme

Le calcul différentiel est utilisé pour tracer la courbe d'une fonction. Il dépend de suivre le comportement de la fonction f(x) quand x varie dans un intervalle donné et la représentation des couples (x ; y) dans un repère orthonormé où y = f(x). On étudie ici le tracé des courbes représentants des fonctions polynômes de degré inferieur ou égal à 3c'est -a-dire de la forme $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

Pour tracer la courbe de la fonction f où y = f(x), on suit le diagramme ci-contre comme ce qui suit :



1- La courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire et symétrique par rapport au point d'origine si f est impaire.

2- Etudiez le comportement de f en déterminant les intervalles de convexité, points d'inflexion s'ils existent et les valeurs maximales et minimales relatives s'elles existent.

3- Etablissez le tableau de croissance, décroissance et convexité pour déterminer l'allure de la courbe et la nature des points critiques.

4- Trouvez les points d'intersection de la courbe avec les deux axes si cela est possible.

5- Déterminez quelques points particuliers appartenant à la courbe pour améliorer le tracé puis tracez la courbe.

Exemple

Tracé la courbe d'une fonction

(4) Tracez la courbe représentative de la fonction f où $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Solution

1- f est une fonction polynôme dont le domaine est R , Elle n'est ni paire ni impaire.

2- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

$f'(x) = 0$, f a des points critiques en $x = 0$ et en $x = 2$

f est croissante dans $]-\infty, 0[$, $]2, \infty[$ et décroissante dans $]0, 2[$

$f''(x) = 0$ en $x = 1$

$f''(x) < 0$ dans $]-\infty, 1[$ la courbe est convexe vers le haut dans ,

$f''(x) > 0$ dans $]1, \infty[$ la courbe est convexe vers le bas dans

Le point $(1, f(1)) = (1, 2)$ est un point d'inflexion.

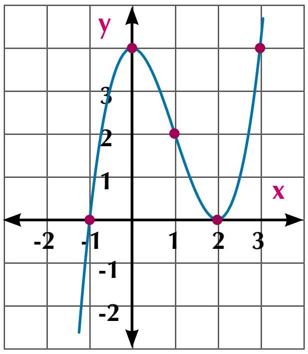
3- Le tableau suivant montre la croissance, décroissance et la convexité.

x	$-\infty$	0		1		2	∞
signe de f'	+	0		-		0	+
comportement de f	↗			↘			↗
signe de f''		-		0		+	
Convexité		⌒				⌣	
y		4		2		0	
		valeur minimale relative		point d'inflexion		valeur minimale relative	

4- points d'intersection avec les axes : (0; 4) , (2; 0)

5- L'allure générale de la courbe de f

Points particuliers $(-1 ; 0)$; $(3 ; 4)$



Essayez de résoudre

(4) Tracez la courbe représentative de la fonction f où $y = f(x) = 12x - x^3$

Exemple

L'allure générale de la courbe d'une fonction

(5) Tracez l'allure générale de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ si

1- f est continue dans $[1, 7]$, $f(1) = -2$, $f(5) = 4$

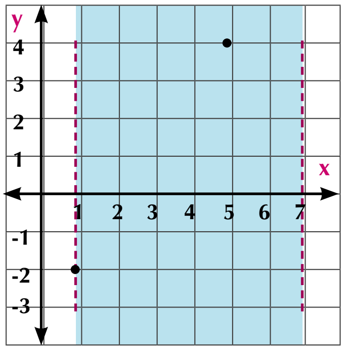
2- $f'(5) = 0$, $f'(x) > 0$ quand $x < 5$, $f'(x) < 0$ quand $x > 5$

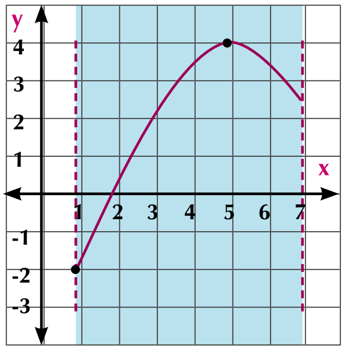
3- $f''(x) < 0$ quand $1 < x < 7$

Solution

De 1 : on trace les axes.
Les points (1; -2) ; (5; 4) appartiennent au domaine [1; 7].

De 2 : En x = 5 la tangente // l'axe des abscisses f est croissante dans] 1; 5[et décroissante dans] 5; 7[
De 3 : la courbe est convexe vers le haut dans] 1; 7[





Essayez de résoudre

5 Tracez l'allure générale de la courbe de la fonction f où y = f(x) si :

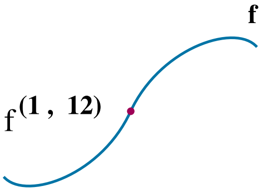
1- f est continue dans [0, ∞[, $f(4) = 3$, $f(0) = 1$

2- $f'(x) > 0$ quand $x > 0$

3- $f''(x) > 0$ quand $x < 4$, $f''(4) = 0$, $f''(x) < 0$ quand $x > 4$

Exemple **Résolution d'équations**

6 Déterminez a et b pour que le point (1, 12) soit un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f où $f(x) = ax^3 + b\,x^2$



Solution

∵ Le point (1 , 12) est un point d'inflexion de la courbe de la fonction f

∴ $f''(1) = 0$ **(1)** , $f(1) = 12$ **(2)**

$f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x$, $f''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$

de (1): $6\,a + 2\,b = 0$ ∴ $b = -3\,a$

de (2): $a + b = 12$ ∴ $a - 3\,a = 12$ alors $a = -6$, $b = 18$

Essayez de résoudre

6 Déterminez a et b pour que le point (2, 2) soit un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x$

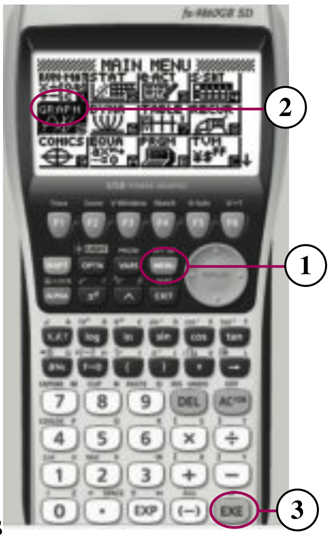
Activité

Utilisation d'une calculatrice graphique.

Pour tracer la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 - 3x + 1$ on suit les étapes suivante:

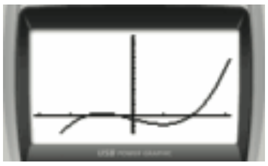
1- Appuyez sur MENU puis choisissez GRAPH, et Appuyez *EXE* .

2- Ècrivez devant Y1 la fonction que veut tracer en appuyant sur les touches suivantes :



Commance → [T, θ, X] [^] [3] [–] [3] [T, θ, X] [+] [1]

3- Pour tracer la fonction **Commancez par** → [EXE] [▲] [EXE] le graphique apparait comme le montre la figure ci-contre.

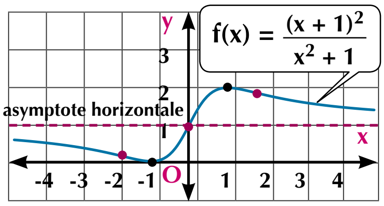


4- Utilisez la touche [◁▷] pour Ètudier la fonction et conjucturer la monotenité de la fonction et la convexité.

Technologie : Comme c'est difficile de tracer les courbes représentatives de quelques fonctions,

vous pouvez utiliser le programme geogebra ou un autre logiciel de graphisme pour les tracer.

La figure ci-contre montre la courbe représentane de la fonction f où $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$



Remarquez que :

1) Points critiques : La courbe admet des points critiques en

$x = -1$ et en $x = 1$

Quand $x = -1$ $\quad f(-1) = 0$ $\quad$ valeur minimale relative,

Quand $x = 1$ $\quad f(1) = 2$ $\quad$ valeur maximale relative.

2) Intervalle de convexité : vers le haut dans : $]-\infty\,;\,-\sqrt{3}\,[$, $]0\,;\,\sqrt{3}\,[$

vers le bas dans : $]-\sqrt{3}\,;\,0[$, $]\sqrt{3}\,;\,\infty[$

3) Point d'inflexion : En $x = -\sqrt{3}$, la courbe est coupée par une tangente

En $x = \sqrt{3}$, la courbe est coupée par une tangente

4) L'allure générale de la courbe : les extrémités de la courbe se rapprochent de la droite $y = 1$ qui est appelée l'asymptote horizontale de la courbe représentante f dont l'équation

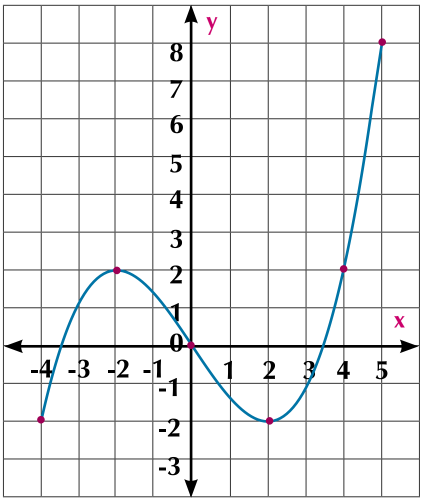
$$y = a \text{ où } a = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1$$

Application : En utilisant l'un des logiciels de graphisme, tracez les courbes représentatives des fonctions suivantes puis étudiez les propriétés de chacune d'elles:

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2+3} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$$

Exercices 3 - 3

1 **La figure ci-contre montre la courbe représentante de la fonction f où y=f(x). Complétez :**



- **a** Domaine f = ...
- **b** f' (x) = 0 quand x ∈ ....
- **c** f'' (x) > 0 quand x ∈ ....
- **d** la courbe est convexe vers le haut quand x ∈ ....
- **e** la courbe admet un point d'inflexion quand x ∈ ....
- **f** la fonction a une valeur minimale relative en x = ...
- **g** la fonction a une valeur maximale absolue en ....

Dans ce qui suit, déterminez les intervalles de convexité de la courbe représentante de la fonction f puis trouvez les coordonnées des points d'inflexion (s'ils existent):

2 $f(x) = 4 - 6x - 3x^2$

3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

4 $f(x) = 15x + 6x^2 - x^3$

5 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

6 $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

7 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

8 $f(x) = 3$

9 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x \text{ quand } x < 0 \\ 4x - x^2 \text{ quand } x \geqslant 0 \end{cases}$

10 Démontrez que la mesure de l'angle que fait la tangente au point d'inflexion de la courbe de la fonction f où $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ est égale $\dfrac{\pi}{4}$

11 Si la courbe représentative de la fonction f où $f(x) = x(x - 3)^2$ admet une valeur maximale relative en x_1 et valeur minimale relative en x_2, démontrez que l'abscisse du point d'inflexion = $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$

12 Déterminez a et b pour que le point (1 ; - 1) soit un point d'inflexion de la courbe d'équation $x^2 y + a y + b x^2 = 0$

Dans ce qui suit, tracez l'allure générale de la courbe de la fonction contenue f qui a les propriétés données:

13 $f(0) = 4$ $f(3) = 4$, $f'(x) < 0$ pour tout $x < 2$, $f'(x) > 0$ pour tout $x > 2$, $f''(x) > 0$

14 $f(1) = f(5) = 0$, $f'(x) < 0$ pour tout $x < 3$, $f'(x) > 0$ pour tout $x > 3$, $f''(x) < 0$ pour tout $x \neq 3$

15 $f(-1) = 2\ f(0) = 4$, $f(1) = 0$, $f'(1) = f'(-1) = 1$, $f''(x) < 0$ pour tout $x < 0$, $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$

16 $f(3) = 4$, en $x < 3$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ et en $x > 3$ alors $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

Dans ce qui suit, étudiez le comportement de la fonction f puis tracez l'allure générale de sa courbe:

17 $f(x) = x^2 - 6x + 5$

18 $f(x) = 3 - x^2$

19 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

20 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

21 $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$

22 $f(x) = -x(x-3)^2$

23 $f(x) = (2-x)(x+1)^2$

24 $f(x) = \frac{1}{8}(x+4)(x-2)^2$

25 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 \text{ quand } x > 0 \\ x^2 - 2x \text{ quand } x \leqslant 0 \end{cases}$

26 $f(x) = x\,|x-4|$

3 - 4 Applications sur les valeurs maximales et minimales relatives

A apprendre

- modélisation mathématique

Vocabulaires de base

- modélisation mathématique

Aides pédagogiques

- calculatrice scientifique
- logiciel de graphisme

Modélisation mathématiques

La prise d'une décision scientifique pour résoudre un problème quelconque passe par quelques étapes:

1- Détermination du problème (but et Possibilités) .

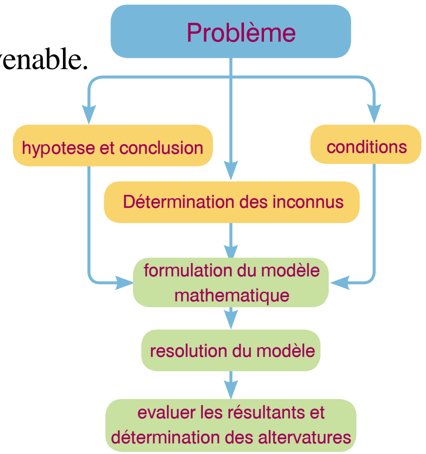
2- Développer un modèle conceptuel ou de la perception pour conjurer les problèmes.

3- Trouver un modèle scientifique convenable.

4- Résolution du modèle et prendre d'une décision.

La modélisation mathématique est la formulation du problème quelconque selon des relations mathématiques qu'on appelle modèle mathématique

Le diagramme ci-contre résume le modèle mathématique:



1- Détermination le but du problème et ses variables (Intérêt maximum – coût minimum- aire maximale, …..)

2- Détermination les valeurs des inconnues du problème pour arriver au but cherché.

3- Détermination la relation entre les inconnues (équations – inéquations).

4- formuler le modèle mathématique (transformer le problème sous une forme mathématique à résoudre).

5- Résolution du modèle mathématique et interpréter ses résultats selon la nature du problème.

6- Identifier les alternatives disponibles si le problème a plus qu'une solution.

Le calcul différentiel nous aide à resoudre le modèle mathématique pour la plus part des problèmes de la vie si le but est d'obtenir la plus grande ou la plus petite valeur d'une variable quelconque dans le domaine des valeur extrémales relatives ou absolues comme montre les exemples suivants.

Exemple Etude de la dérivée première

(1) Dans un triangle de 16 cm de base et 12 cm de hauteur, on trace un rectangle tel qu'un de ses côtés est sur la base du triangle et les sommets du côté opposé sont situés sur les deux autres côtés du triangle. Déterminez les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire possible.

Solution

1- Pour calculer la plus grande aire, on trace une figure selon l'hypothèse et les conditions du problème.

2- Détermination les variables (inconnues) en posant que la largeur du rectangle = x cm ; sa longueur = y cm et son aire = A cm^2

3- Détermination la relation entre les variables **(modèle mathématique)**

Aire du rectangle $A = x \times y$

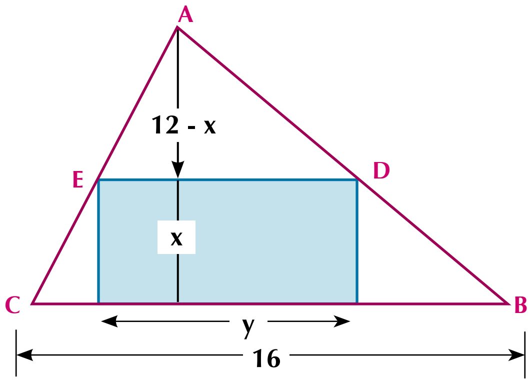
4- Mettez le modèle mathématique sous forme d'une seule variable si c'est possible

$\frac{y}{16} = \frac{AD}{AB} = \frac{12 - x}{12}$ **(de similitude des triangles)**

$\therefore\ y = \frac{4}{3}(12 - x),\ x \in [0, 12]$ **(1)**

Aire du rectangle $A = \frac{4}{3}\ x\ (12 - x)$

$A = f(x) = 16x - \frac{4}{3}x^2$ **(2)**



5- Résolution du modèle mathématique : En dérivant les membres de la relation (2) par rapport à x.

$\therefore\ f'(x) = 16 - \frac{8}{3}x\ ,\ f''(x) = -\frac{8}{3}$

$f'(x) = 0$ pour $x = 6$ $\therefore$ le point $(6; f(6)) = (6 ; 8)$ est un point critique

$x = \frac{16 \times 3}{8} = 6$ et $f''(x) < 0$

$\because$ f a une valeur maximale absolue en $x = 6$. Les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire possible sont 6 cm et 8 cm

Essayez de résoudre

1) Trouvez la plus grande aire possible d'un triangle isocèle qu'on peut tracer dans un cercle de 12 cm de rayon.

Exemple

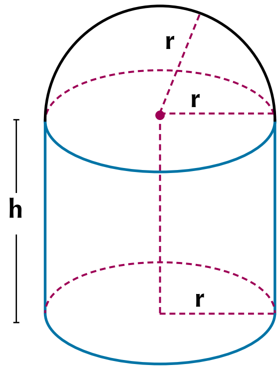
Calcul du coût minimum

2) Une cellule de grains sous la forme d'un cylindre droit de demi-cercle de couvercle est fabriquée d'élargir $108\pi m^3$ de grains **(élargissement est dans la partie cylindrique seulement),** Si le coût d'une unité d'aire du couvercle est le double de celui de la face latérale. Trouve les dimensions de la cellule pour que le coût soit minimum?

Solution

1- Pour calculer le plus petit cout, on trace une figure selon l'hypothèse et les conditions du problème.

2- Détermination les variables (inconnues): en posant que la hauteur du cylindre = h mètre, la longueur du rayon de sa base = r mètre et le coût d'une unité d'aire de la face = c L.E. Donc le coût d'une unité d'aire de couvercle = 2c L.E et le coût total = k L.E.



3- Détermination la relation entre les variables (modèle mathématique):

Aire du cylindre = périmètre de la base × h = $2\pi rh$ unité d'aire

Aire de demi-sphérique = $\frac{1}{2}$ aire de la sphère = $2\pi r^2$ unité d'aire

Coût total k = $2\pi rh \times c + 2\pi r^2 \times 2c = 2\pi r c(h + 2r)$

4- Mettez le modèle mathématique sous forme d'une seule variable :

$\because$ Volume de la partie cylindrique = 108π $\therefore$ $\pi r^2 h = 108\pi$ **d'où** $h = \frac{108}{r^2}$

Coût total $k = 2\pi r c(\frac{108}{r^2} + 2r)$

$k = f(r) = 216\pi c\, r^{-1} + 4\pi c\, r^2$

5- Résolution du modèle mathématique : $f'(r) = -216\pi c\, r^{-2} + 8\pi c\, r$

Point critique : $f'(r) = 0$ $\therefore$ $r^3 = \frac{216}{8}$ d'où r 3 r = 3 (un seul point)

Etudiez de la deuxième dérivée:

$\because$ $f''(r) = 432\pi\, cr^{-3} + 8\pi\, c$ $\therefore$ $f''(3) > 0$

Si la longueur du rayon de la cellule est 3 m et sa hauteur est $\frac{108}{9}$ = 12 m. le cout est minimum

Essayez de résoudre

(2) On veut peindre, à l'aide d'une matière isolante, l'intérieure d'un réservoir sous la forme d'une boite fermée de capacité 252 mètres cube dont la base est un carrée. Si le coût de la base est 50L.E par mètre carré , celui du couvercle est 20 L.E et celui de la surface latérale est 30 L.E. Trouvez les dimensions de la boite pour que le coût soit minimum.

Exemple

Application de la vie

(3) Un mur vertical de 2 m de hauteur se trouve à 2 m d'une maison. Déterminez l'échelle la plus courte, reposant sur le mue vertical, qui va du sol jusqu'à la façade de la maison.

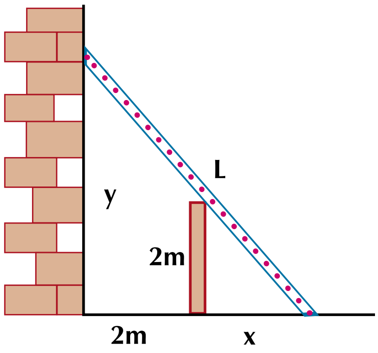
Solution

1- Pour calculer l'échelle la plus courte, on trace une figure selon l'hypothèse et les conditions du problème.

2- Détermination des variables inconnues:

en posant que la hauteur de l'échelle = L mètre, le sommet de l'échelle s'éloigne du sol de y mètre et le bas de l'échelle s'éloigne du mur de x mètre.

3- Modélisation du problème :



D'après le théorème de Pythagore :

$L^2 = (x + 2)^2 + y^2$ **(1)**

D'après le similitude : $\frac{y}{2} = \frac{x+2}{x}$

$\therefore$ $y = \frac{2x+4}{x} = 2 + 4x^{-1}$ **(2)**

Pour trouver l'échelle la plus courte, il faut que ℓ^2 soit minimum

4- Résolution du modèle mathématique en dérivant les relations (1) et (2) par rapport à x.

$\therefore \frac{d}{dx}(l^2) = 2(x+2)\times 1 + 2y\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(l^2) = 2(x+2) + 2\left(\frac{2x+4}{x}\right)\times\frac{-4}{x^2} = 2(x+2)\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)$

Point critique : $\frac{d}{dx}(l^2) = \text{zero}$

$\therefore x = -2$ refusé ou $\frac{8}{x^3} = 1$

$\therefore$ Quand $x = 2$, l^2 est la plus petite possible

x		2
Signe de $\frac{d}{dx}(\ell^2)$	−	+
ℓ^2	↘	↗

d'aprés l'étude de la derivée premiére de croissance et décroissance, on remarque que le signe de $\frac{d}{dx}(\ell^2)$ change de - à +

$\therefore$ quand $x = 2$; ℓ^2 la plus petite possible

En substituant en (2) $\therefore y = \frac{2\times 2+4}{2} = 4$

En substituant en (1)

$\therefore \ell^2 = (2+2)^2 + (4)^2 = 32$ $\therefore l = 4\sqrt{2}$

L'échelle la plus courte, reposant sur le mue vertical, qui va du sol jusqu'à la façade de la maison est $4\sqrt{2}$ mètres

Essayez de résoudre

3 Dans un repère orthogonal, on trace $\overleftrightarrow{AB}$ qui passe par le point C(3 ; 2) et coupe les axes aux points A et B. Démontrez que la plus petite aire du triangle AOB est égale à 12 unité d'aire où O est le point d'origine.

Exemple

Secteur circulaire

4 Une plaque métallique sous la forme d'un secteur circulaire d'aire 16 cm^2 . Trouvez la longueur du rayon du secteur pour que le périmètre soit minimum puis trouvez la mesure de son angle.

Solution

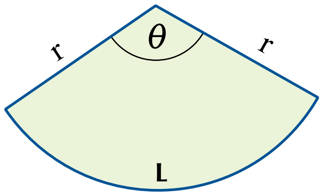
Soit la longueur de l'arc du secteur l cm , la longueur de son rayon = r cm

$\therefore$ Périmètre du secteur $P = 2r + l$ **(1)**

$\because$ Aire du secteur $= \frac{1}{2} l r = 16$ $\therefore l = \frac{32}{r}$

En substituant en (1) $\therefore P = 2r + \frac{32}{r}$ **(2)**

dérivant la relation **(2)** par rapport à r



$\frac{dP}{dr} = 2 - \frac{32}{r^2}$, $\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{64}{r^3}$

$\frac{dP}{dr} = 0$ pour $r = 4$ et $\frac{d^2P}{dr^2} > 0$

$\therefore$ Quand $r = 4$ le périmètre du secteur est minimum

$\because$ Aire du secteur $= \frac{1}{2} r^2 \theta^{rd}$ $\therefore \theta = \frac{16\times 2}{4\times 4} = 2^{rd}$

Essayez de résoudre

4 Si le périmètre d'un secteur circulaire = 12 cm, trouvez la mesure de son angle pour que son aire soit maximale.

Exercices 3 - 4

1 Trouvez deux nombres dont la somme est 30 et le produit est maximum.

2 La somme des deux nombres entiers positifs est 5, trouvez ces deux nombres de façon à ce que la somme du cube du plus petit et le double du carré de l'autre soit minimale.

3 Si la somme d'un nombre positif et son inverse est le plus petit possible, trouvez ce nombre.

4 Trouvez la plus grande aire d'un terrain rectangulaire entouré par une clôture de longueur 120 mètres.

5 Le périmètre d'un secteur circulaire est 30 cm et son aire est la plus grande possible. Trouvez la longueur du rayon de son cercle.

6 Si la somme des longueurs des arêtes d'une boite rectangulaire de base carrée est 240 cm. Trouvez ses dimensions pour que son volume soit maximum.

7 Si la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à 10 cm. Trouvez les longueurs des côtés de l'angle droit pour que son aire soit maximale.

8 Un champ ouvert bordé d'un côté d'une rivière droite. Sélectionnez comment mettre une clôture autour des autres aspects de la pièce rectangulaire de le terre du champ pour capturer la plus grande surface (aire) possible par 800 mètres de clôture. Quelle est l'air de ce terraine ?

9 On veut fabriquer des boites de boissons cylindriques fermées dont la capacité de chacune d'elle est k unités de volume à l'aide de la moindre matérielle. Trouvez le rapport entre la hauteur de la boite (h) et la longueur du rayon de sa base(r)

10 Trouvez la plus grande aire d'une cour sous la forme d'un rectangle de périmètre 420 mètres.

11 La longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à 30 cm. Trouvez les longueurs des deux autres côtés si la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit à l'hypoténuse est la plus grande possible.

12 Un papier cartonné sous la forme d'un rectangle de dimensions 15 cm ; 24 cm. On découpe quatre carrés identiques de longueur de côté x cm dans chacun de ses coins et on a construit une boite sans couvercle avec le reste. Déterminez les dimensions de la boite pour que son volume soi maximum.

13 Un réservoir de base carrée et de faces verticales qui peut être rempli par une certaine quantité d'eau. Démontrez que le coût de peindre l'intérieur du réservoir par une matérielle isolante est minimum si la longueur de sa hauteur est égale à la moitié de la longueur du côté de sa base.

14 Trouvez le point de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2} x^2 - 4$ le plus proche du point (0 ; 5).

15 Trouvez la distance la plus courte entre la droite $x - 2y + 10 = 0$ et la courbe $y^2 = 4x$

16 ABC est un triangle où a ' et b' sont constants. Trouvez la mesure de l'angle compris entre eux pour que l'aire du triangle soit maximale.

17 L'intensité du courant I (en ampères) dans un circuit de courant alternatif en un instant quelconque t (en seconds) est donnée par la relation $I = 2 \cos t + 2 \sin t$. Quelle est la valeur maximale du courant dans ce circuit ?

18 Le volume d'une ferme de bactéries placée dans un milieu nutritif se développe selon de la relation : $f(n) = 2000 + \frac{5000\,t}{100 + t^2}$ où t est le temps (en heures). Déterminez la valeur maximale de la ferme.

19 ABCD est un carré de 8 cm de longueur du côté, $M \in \overline{BC}$ tel que $BM = x$ cm et $N \in \overline{CD}$ tel que $CN = \frac{3}{2}x$. Trouvez la valeur de x pour que l'aire du triangle AMN soit minimale.

20 $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle de rayon R. On trace deux tangentes au cercle en A et B. E est un point sur le cercle, la tangente passant par E coupe les tangentes précédentes en D et C respectivement.
Démontrez que la plus petite aire du trapèze ABCD est égale à $2r^2$ unité d'aire.

Résumé de l'unité

Etude de la monotonie d'une fonction à l'aide de la dérivée première:

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur]a , b[:

1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a ; b[$ alors f est croissante dans]a ; b[.

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a ; b[$ alors f est décroissante dans]a ; b[.

Point critique:

Soit f une fonction continue dans]a ; b[on dit que (c ; f(c)) est un point critique s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes $c \in]a , b[$, $f'(c) = 0$ ou f' n'est pas dérivable en x = c

Valeurs maximale et minimale relative

Soit f une fonction contenue dans un intervalle I , $c \in I$, alors:

1- f atteint une valeur maximale relative en x = c, si $f(x) \leqslant f(c)$ pour tout $x \in]a , b[$ où $]a , b[\subset I$

.

2- f atteint une valeur minimale relative en x = c , Si $f(x) \geqslant f(c)$ pour tout $x \in]a , b[$ où $]a , b[\subset I$.

Etude de la dérivée première pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives:

Si f(x) est contenue en x = c et (c ; f(c)) est point critique où $c \in$ un intervalle ouvert

1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x < c$, $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors f(c) est une valeur maximale relative.

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x < c$, $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors f(c) est une valeur minimale relative.

Théorème: Si f est dérivable dans]a , b[et elle atteint une valeur maximale ou minimale relative en $c \in]a , b[$, alors $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas

Les valeurs extrémales d'une fonction dans un intervalle fermé:

Théorème: Si la fonction est continue dans [a , b], alors la fonction atteint une valeur maximale absolue et une valeur minimale absolue dans [a , b].

Convexité des courbes

Soit f une fonction dérivable dans]a , b[, la courbe de la fonction est convexe vers le bas si f ' est croissante dans cet intervalle et convexe vers le haut si f ' est décroissante dans cet intervalle.

Etude de la deuxième dérivée pour déterminer la convexité d'une courbe

Théorème : Soit f une fonction dérivable deux fois dans]a , b[, alors:

1- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a , b[$, alors la courbe de la fonction est convexe vers le bas dans]a , b[.

2- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a , b[$, alors la courbe de la fonction est convexe vers le haut dans]a , b[.

Résumé de l'unité

Point d'inflexion

Soit f une fonction continue dans]a , b[, c ∈] a , b[et une tangente de la courbe passe par le point (c ; f(c)). Ce point est appelé point d'inflexion de la courbe s'il change de convexité.

Etude de la deuxième dérivée pour les valeurs maximales ou minimales relatives

Théorème: Soit la fonction f dérivable deux fois sur un intervalle ouvert contenant C où $f'(c) = 0$

1- Si $f''(c) < 0$ alors f(c) est une valeur maximale relative.

2- Si $f''(c) > 0$ alors f(c) est une valeur minimale relative.

Courbes représentatives des fonctions polynômes

Pour tracer la courbe de la fonction f où y = f(x), on suit les étapes suivantes:

1- La courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire et symétrique par rapport au point d'origine si f est impaire.

2- Etude du comportement de f en déterminant les intervalles de convexité, points d'inflexion s'ils existent et les valeurs maximales et minimales relatives s'elles existent.

3- Etablissez le tableau de croissance, décroissance et convexité pour déterminer l'allure de la courbe et la nature des points critiques.

4- Trouvez les points d'intersection de la courbe avec les deux axes si cela est possible.

5- Déterminez quelques points particuliers appartenant à la courbe pour améliorer le tracé puis tracez la courbe.

Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées

1) Si f: [-2, 4] $\longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) = $x^3 - 3x$, alors le nombre des points critiques est égal à:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

2) La fonction f atteint une valeur minimale relative si f(x) est égale à:

a) $2x - 1$ b) $x^2 + 1$ c) x^3 d) $-x^3$

3) La courbe de la fonction f est convexe vers la bas $\mathbb{R}$ si f(x) est égale à:

a) $3 - x^2$ b) $3 - x^3$ c) $3 - x^4$ d) $3 + x^4$

4) Si la courbe de la fonction f a un point d'inflexion en x = 2 où $f(x) = x^3 + K x^2 + 4$, alors la valeur de k est :

a) - 6 b) - 3 c) 3 d) 6

5) La fonction f atteint une valeur maximale relative si f(x) est égale à:

a) $x^2 - 2$ b) $x^3 + 1$ c) $x^3 + 3x$ d) $x^4 - 2x^2$

Dans ce qui suit, déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction :

6) $f(x) = (x - 3)^2$
7) $f(x) = 2x^3 - x^2$
8) $f(x) = (x + 4)^3$
9) $f(x) = 5 + 4x - x^2$
10) $f(x) = x^2 (x - 2)$
11) $f(x) = x^4 - 4x^3$
12) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
13) $f(x) = \frac{x}{x+2}$
14) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

Dans ce qui suit, déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas ainsi que les points d'inflexion s'ils existent :

15) $f(x) = (x - 1)^2$
16) $f(x) = x^3 - 3x^2$
17) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$
18) $f(x) = x^3 - 12x + 7$
19) $f(x) = 6x^3 - x^4$
20) $f(x) = x^2 - \frac{8}{x}$

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs extrémales relatives de la fonction f:

21) $f(x) = 4 - 6x - x^2$
22) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$
23) $f(x) = x(x - 2)^2$
24) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$
25) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
26) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$
27) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 9}$
28) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2}$
29) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

Dans ce qui suit, déterminez les valeurs extrémales absolues de la fonction f dans l'intervalle donné:

30) $f(x) = x^3 - 9$ [0 , 2]
31) $f(x) = x^3 - 12x + 16$ [-3 , 5]
32) $f(x) = x^4 + 2$ [-1 , 2]
33) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ [-1 , 1]
34) $f(x) = x(x^2 - 12)$ [-1 , 4]
35) $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$ [0 , 5]

36 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 \text{ when } x \leqslant 0 \\ x^2 - 2x \text{ when } x > 0 \end{cases}$ [-3, 3]

Tracez l'allure générale de la courbe représentative de la fonction continue f vérifiant les conditions données:

37 $f(4) = 3$, $f'(4) = 0$ et $f''(x) < 0$ pour tout x.

38 $f(2) = 5$, $f'(2) = 0$, $f''(x) > 0$ pour $x < 2$ et $f''(x) < 0$ pour $x > 2$

39 $f(-3) = 8$, $f(0) = 4$, $f(3) = 0$, $f'(x) > 0$ pour $x < -3$ et $x > 3$, $f''(x) < 0$ et $x < 0$, $f''(x) > 0$ pour $x > 0$

40 $f(0) = 3$, $f'(2) = f'(-2) = 0$, $f'(x) < 0$ pour $-2 < x < 2$, $f''(x) < 0$ pour $x < 0$ et, $f''(x) > 0$ pour $x > 0$

Tracez l'allure générale de chacune des courbes suivantes en déterminant les valeurs extrémales relatives et les points d'inflexion s'ils existent :

41 $f(x) = 4 - x^2$

42 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

43 $f(x) = x(x + 3)^2$

44 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{1}{3}$

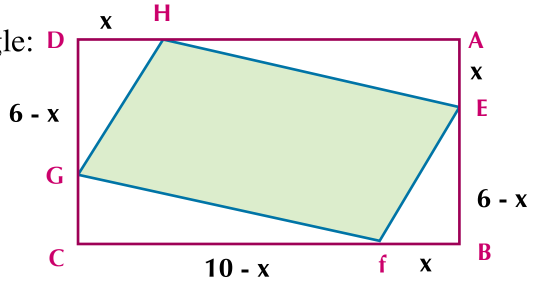
45 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

46 $f(x) = 5 + 3x - x^3$

47 Trouvez les valeurs de a ; b ; c ; d pour que la courbe d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ait une valeur maximale relative au point (0 ; 6) et une valeur minimale relative au point (1 ; 5), puis tracez la courbe.

48 On forme un rectangle avec un fil de longueur 20 mètres. Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

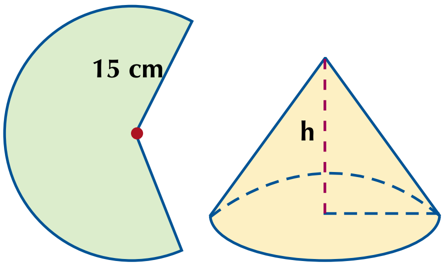
49 **Dans la figure ci-contre** A B C D est un rectangle:



a Démontrez que la figure EFGH est un parallélogramme dont l'aire $A = 2x^2 - 16x + 60$

b Trouvez la plus petite valeur possible de l'aire A.

50 On forme un cône circulaire droit de h cm de hauteur par le pliage d'un papier cartonné sous la forme d'un secteur circulaire dont le rayon de son cercle est égal à 15 cm. Montrez que le volume du cône est donné par la formule : $V = \frac{\pi}{3} h (225 - h^2)$, puis trouvez le plus grand volume possible du cône.

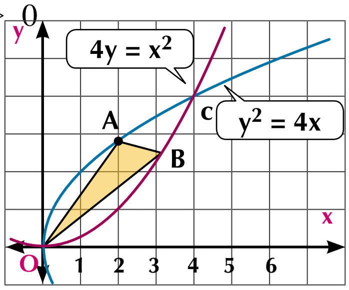


51 On veut mettre un cylindre circulaire droit dans une sphère d'intérieur vide de rayon intérieur 10 cm. Trouvez la hauteur du cylindre quand son aire latérale est maximale.

52 Démontrez que : l'inéquation

$\frac{x}{a x^2 + b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ est vérifiée pour tout $x \in R$; $a > 0$, $b > 0$

53 Soit C le point d'intersection des deux courbes d'équations $y^2 = 4x$, $4y = x^2$, le point A d'abscisse 2 est situé sur la courbe $y^2 = 4x$ le point B(x ; y) est situé sur la courbe $4y = x^2$ entre O et C . Trouvez la plus grande aire possible du triangle OAB.

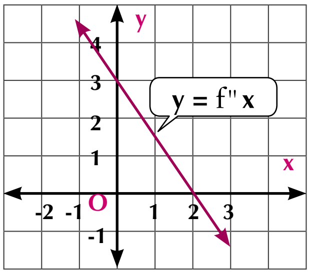


54 Un réservoir couvercle d'eau sous la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée de 2x de longueur du côté et sa hauteur x surmonté d'un cylindre circulaire droit. La longueur du diamètre de sa base est 2x et sa hauteur est y. Si le volume total du réservoir est égal à 27 mètre cube, calculez la valeur de x pour que l'aire du réservoir soit minimale.

Pour plus d'activités et des exercices : visite le site électronique www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulative

1 La figure ci-contre montre la courbe représentative de $f''(x)$, complètez :



a la courbe représentative de f est convexe vers le haut quand $x \in$ ....

b la courbe représentative de f a un point d'inflexion pour $x =$ ....

c si $f'(-1) = f'(5) = 0$, alors la fonction f a une valeur maximale relative en $x =$ ....

d la fonction f est décroissante pour tout $x \in$ ....

2 Si $f'(x) = ax + b$ où $a < 0$

a Etudiez l'existence de valeur extrémale de la fonction f en déterminant sa nature s'ils existent.

b Déterminez les intervalles de croissance et décroissance de la fonction f quand $a = -2$ et $b = 5$

3 Déterminez les points critiques et les intervalles de croissance et décroissance de la fonction f où $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

4 Si $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, étudiez l'existence des points critiques de la fonction f, déterminez les intervalles de convexité vers la haut et vers le bas, points d'inflexion s'ils existent puis tracez l'allure générale de sa courbe.

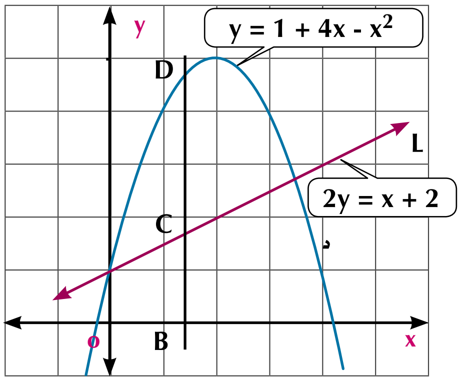
5 Tracez l'allure générale de la courbe de la fonction f où $y = f(x)$ si:
f est continue dans le $[-1, 5]$, $f(1) = f(3) = 0$, $f'(2)$ n'existe pas,
$f'(x) > 0$ quand $x < 2$, $f'(x) < 0$ quand $x > 2$, $f''(x) > 0$ quand $x \neq 2$

6 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{Si } x \geqslant 1 \\ 3x - x^2 & \text{Si } x < 1 \end{cases}$

a Trouvez les valeurs de a et de b

b Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion s'ils existent.

7 Si la somme des deux composantes de l'ensemble des couples (x ; y) des nombres entiers non négatif est égale à 5. Trouvez le couple dont le produit du carré de la première composante par le cube de la deuxième composante est maximum.



8 **La figure ci-contre montre** la courbe représentative de la fonction f et la droite L. Si la droite $\overleftrightarrow{BC}$ est parallèle à l'axe des ordonnées et coupe la partie positive de l'axe des abscisses ; la droite L et la courbe de f en B ; C ; D respectivement, trouvez les coordonnés du point B pour que CD soit maximum.

Unité 4

Intégral finie et ses applications

Introduction de l’unité

Avez-vous vu un artisan de paniers fait une de ses paniers? Le processus d'assemblage des tranches parallèles côte à côte conduit de compléter le panier. Cela a aidé les scientifiques de découvrir les méthodes générales d'estimation de la superficie de toute surface plane, en divisant cette région en très petites zones, puis par additionner les aires de ces petites zones, permettre d’estimer l’aire de la surfaces démodé, ce qui a contribué à la découverte la science de l'intégral, qui sera noté par $\int$, qui est la premiere lettre du mois (Somme), qui signifie l’additionne. Dans cette unité on va connaitre les différentes méthodes d’intégration infinie comme intégral par substituions et intégral par partition pour trouver les primitives des fonctions continues puis reconnaitre l’intégral finie à travers le théorème fondamentale de la différentiation et l’intégration qui relie entre l’intégral finie et infinie en utilisant l’intégral finie pour calculer les aires d’une région plane et le volume d’un solide de révolution , et connaitre quelques applications économiques de l’intégral finie et utilisation de la modélisations pour résoudre quelques problèmes mathématiques et quotidiennes.

Objectifs de l’unité

A la fin de cette unité et après avoir exécuté les activités, l’élève doit être capable de:

- Connaitre quelques méthodes de calcul intégral, comme substituions non trigonométrique, intégral par partition $\int x\, e^{x}\, dx$
- Connaitre l’intégral des fonctions trigonométriques et les tables des intégrations fondamentales.
- Connaitre l’intégral finie (théorème fondamentales de la différentiation) et déduire ses propriétés.
  - $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$
  - $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
  - $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$
  - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx$ $= \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
  - $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$
  - $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$ où f est une fonction paire .
  - $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$ où f est une fonction impaire .
- On utilise l’intégral finie pour résoudre des problèmes des aires
- Déterminer l’aire de la région compris entre la courbe d’une fonction et l’axe des abscisses, où f(x) non négative pour tout x apparient à l’ensemble de définition
- Déterminer l’aire de la région compris entre deux courbes
- On utilise l’intégral finie pour résoudre des problèmes pour trouver le volume d’un solide de révolution par rapport à l’un des axes des coordonnées

Vocabulaires de bas

- Dérivée réciproque
- Intégral infinie
- Différentiation
- Intégral par substitution (changement de variable)
- Intégral par partition
- Règle
- Fonction trigonométrique
- Intégral finie
- Théorème fondamentale de la dérivation et intégration
- Les aires dans le plan
- Volume de solides de révolution

Leçons de l'unité

Leçon (4-1) : Les méthodes d'intégrations

Leçon (4-2) : Intégrations de fonctions trigonométriques

Leçon (4-3) : Intégral finie

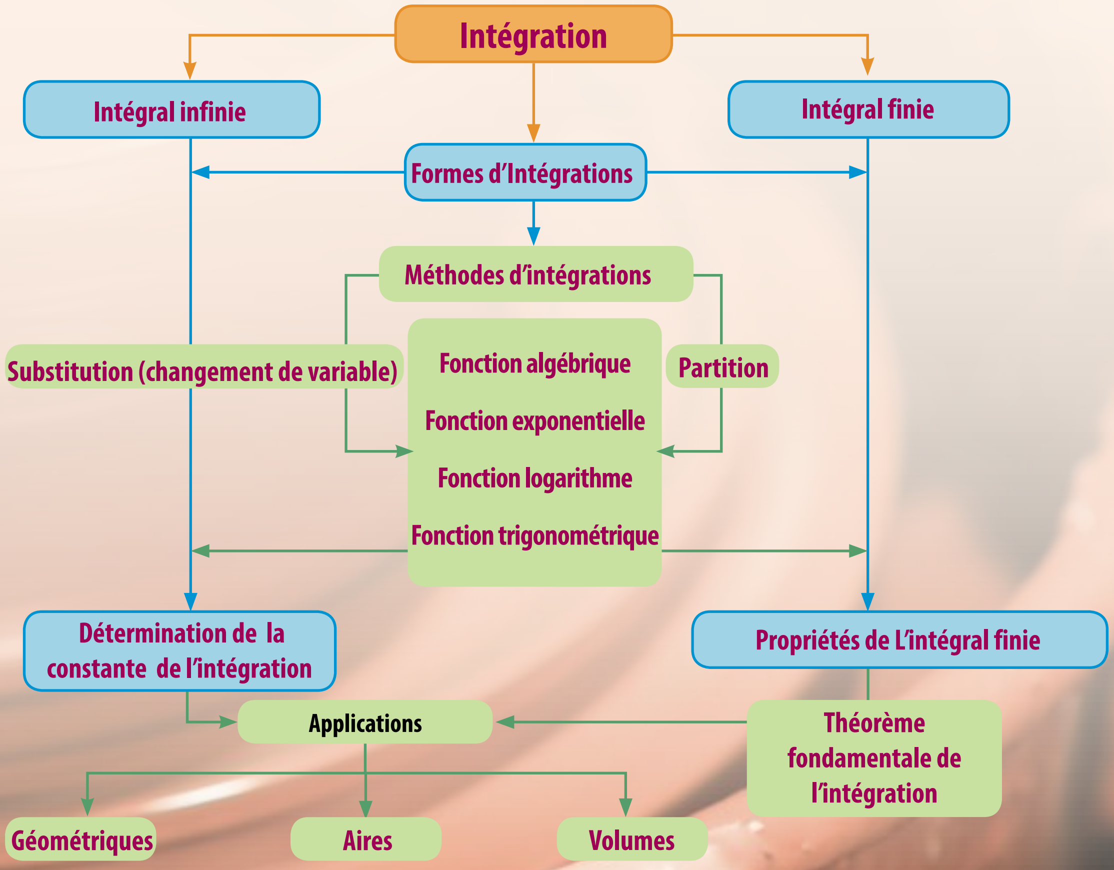
Leçon (4-4) : Les aires dans le plan

Leçon (4-5) : Volume de solides de révolution

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique - Logiciel de graphisme
- L'internet.

Organigramme de l'unité



4 - 1 Méthodes d'intégrations

Allez apprendre

- trouver la fonction principale d'une fonction donnée.
- trouver la différentiation d' une fonction
- calcule l'intégral par substitution
- calcule l'intégral par partition

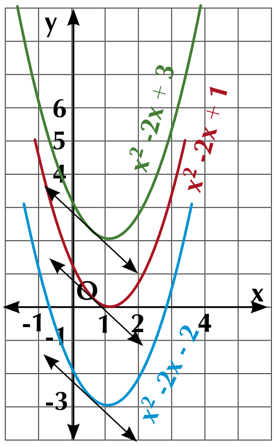
Vocubulaires de base

- Dérivée réciproque
- Intégral infinie
- Différentiation

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique - Logiciel de graphisme

Introduction



D'après votre étude précédant, vous avez étudié la dérivée réciproque ou l'intégral infinie, qui est une opération réciproque de la dérivation. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f dans l'intervalle I si : $\frac{d}{dx}$ F(x) = f (x) pour tous $x \in I$

Quand on ajoute une constante à la fonction réciproque F, elle sera représentée par une famille de courbes y = F (x) + c , qui ont des valeurs différentes de c et les pentes de leur tangentes sont égales , pour celà elles sont parallèles comme montre la figure ci-contre. On appelle les groupes des dérivées réciproques par l'intégral infinie, qui sera noté par : $\int f(x)\,dx$, et on a:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Propriétés de l'intégral infinie :

Soient f et g deux fonctions intégrables dans l'intervalle I, alors :

1- $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

2- $\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$ où k est un nombre réel

Remarquez que :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$ où $n \neq -1$ c est une constante

Par exemple

$$\int (3x^2 + 4x + 5)\,dx = x^3 + 2x^2 + 5x + c$$

➲ Pour calculer les primitives, on a besoin de savoir quelques formes standard d'intégrations des quelques fonctions, mais par fois les intégrations demondées sont différentes des formes standard, pour ce là on doit connaître d'autres méthodes d'intégrations parmi les quelles Intégral par substitution et Intégral par partition qui dépendu de la différentiation.

Différentiation

Si f est une fonction dérivable tel que $y = f(x)$

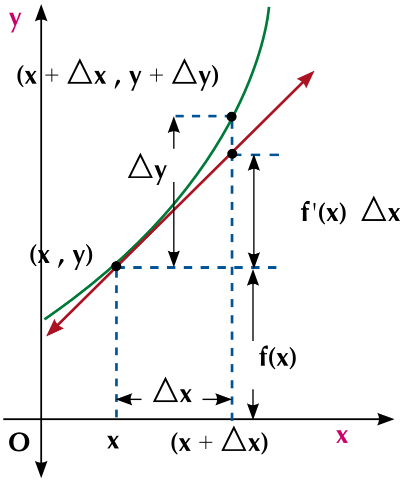
De la définition de la dérivée :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x}$$

$\therefore$ quand $\Delta x \longrightarrow 0$, **alors** : $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow f'(x)$

c-a-d.: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq f'(x)$ quand $\Delta x \simeq 0$, $\Delta x \neq 0$

$\therefore \Delta y \simeq f'(x)\Delta x$ (En multipliant par Δx)



Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert qui contient x , Δx désigne la variation en x où $\Delta x \neq 0$, alors

1- Différentielle de y (est noté dy) = $f'(x)\,\Delta x$

2- Différentielle de x (est noté dx) = Δx

D'où :

$dy = f'(x)\,dx$ c'est une fonction en deux variables x dx

Si $y = x^3$ **alors :** $dy = 3x^2\ dx$

Exemple

Différentielle d'une fonction

1 Trouvez la différentielle dans ce qui suit :

a $y = \frac{x}{x-1}$

b $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

c $y = z \cdot \ell$ où z et g sont des fonctions en x

Solution

a $\because dy = y'\ dx$, $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = 1 + (x-1)^{-1}$

$\therefore dy = \frac{-1}{(x-1)^2}\ dx$

b $\because dV = V'\,dr$ $\therefore dV = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2\,dr = 4\pi r^2\,dr$

c $\because dy = (z \cdot g)'\ dx$

$= (z \cdot g' + g \cdot z')\,dx$

$= z \cdot g'\ dx + g \cdot z'\ dx$

$dy = z\,dg + g\,dz$

Remarque que

$dg = g'\,dx$

$dz = z'\,dx$

Essayez de résoudre

① **1) Trouvez la différentielle dans ce qui suit :**

a $y = (2x + 5)^4$ b $y = e^{2x - 3}$

c $y = \frac{z}{g}$ où z et g sont des fonctions en x

Pensé critique : Si $x^2 + x^2 = 25$ **trouvez :** dy en fonction de x ; y et dx

Primitives usuelles

Il n'y a pas de méthode générale pour calculer les primitives de différentes fonctions comme les méthodes pour calculer les dérivées des fonctions. Pour un grand nombre de fonctions, on trouve une primitive par (lecture inverse) du tableau des dérivées, tous sa dépend de vos connaissances des dérivations des quelques fonctions ; comme montre dans le tableau suivant :

Tableau des dérivées et des primitives de quelques fonctions usuelles	
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $n \in \mathbb{R}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $n \in \mathbb{R} - \{1\}$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x$, $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in Z$	$\int \sec^2 x \, dx = \text{tg } x + c$, $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in Z$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ $a > 0, a \neq 1$	$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$ $a > 0, a \neq 1$
$\frac{d}{dx}(\ln^x) = \frac{1}{x}$ $x > 0$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c$ $x \neq 0$

Intégral par substitution

De plus importants méthodes pour trouver l'intégral du produit de deux fonctions

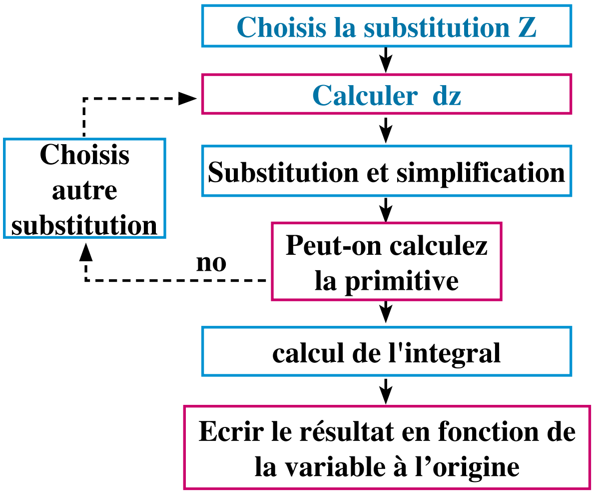
à la forme : $\int f(g(x)) \, g'(x) \, dx$

Si $z = g(x)$ est une fonction dérivable

alors $dz = g'(x) \, dx$ et on a :

$\int f(g(x)) \, g'(x) \, dx = \int f(z) \, dz$

➲ **Pour effectuer la primitive on suit le diagramme ci-contre :**



Exemple — Intégral par substitution

(2) 2) Trouvez

a) $\int x^3 (2x^4 - 7)^5 \, dx$ b) $\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^3} \, dx$

Solution

a) soit $z = 2x^4 - 7$ $\therefore \; dz = 8x^3 \, dx$

$$\int x^3 (2x^4 - 7)^5 \, dx = \frac{1}{8} \int (\underbrace{2x^4 - 7}_{z})^5 \, (\underbrace{8x^3 \, dx}_{dz})$$

$$= \frac{1}{8} \int z^5 \, dz = \frac{1}{8 \times 6} z^6 + c$$

$$= \frac{1}{48} (2x^4 - 7)^6 + c$$

b) soit $z = x^2 + 8x$

$\therefore dz = (2x + 8) \, dx = 2(x + 4) \, dx$

$$\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^3} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+4) \, dx}{(x^2+8x)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^3} \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int z^{-3} \, dz = \frac{1}{2 \times -2} z^{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{4(x^2+8x)^2} + c$$

Essayez de résoudre

(2) Trouvez :

a) $\int 3x (x^2 + 3)^4 \, dx$ b) $\int \frac{x^2}{(x^3 - 4)^5} \, dx$

Exemple — Intégral par substitution

(3) Trouvez

a) $\int x (x + 4)^7 \, dx$ b) $\int (x^2 + 5) \sqrt{x - 1} \, dx$

Solution

a) soit $z = x + 4$ $\therefore \; x = z - 4 , \; dx = dz$

$\int x (x+4)^7 \, dx = \int z^7 (z - 4) \, dz = \int (z^8 - 4z^7) \, dz$ **(substitution)**

$= \frac{1}{9} z^9 - \frac{1}{2} z^8 + c$ **(intégration)**

$= \frac{1}{18} z^8 (2z - 9) + c$ **(simplification)**

$= \frac{1}{18} (x + 4)^8 (2x - 1)$ **(substitution de z)**

b soit $z^2 = x - 1$ **pour simplifier l'intégration** $\therefore\ x = z^2 + 1$, $dx = 2z\ dz$

$$\int (x^2+5)\sqrt{x-1}\ dx = \int [(z^2+1)^2+5] \times z \times 2z\ dz \qquad \textbf{(substitution)}$$

$$= \int [z^4 + 2z^2 + 6] \times 2z^2\ dz$$

$$= 2\int (z^6 + 2z^4 + 6z^2)\ dz \qquad \textbf{(simplification)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{7}z^7 + \frac{2}{5}z^5 + 2z^3\right] + c \qquad \textbf{(intégration)}$$

$$= \frac{2}{35} z^3 [5z^4 + 14z^2 + 70] + c \qquad \textbf{(Factrur commun)}$$

$$= \frac{2}{35}(x-1)^{\frac{3}{2}}\ [5(x-1)^2 + 14(x-1) + 70] + c \qquad \textbf{(substitution de z)}$$

$$= \frac{2}{35}\sqrt{(x-1)^3}\ (5x^2 + 4x + 61) + c$$

Essayez de résoudre

3) Trouvez les primitives suivantes:

a $\int x(2x-3)^4\ dx$

b $\int x^2\ \sqrt[3]{3x+1}\ dx$

Exemple

Intégral par substitution

4 Trouvez :

a $\int \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}}\ dx$

b $\int 6x\, e^{x^2}\ dx$

Solution

a soit $z = 1 + \sqrt{x}$ $\therefore\ \sqrt{x} = z - 1$, $x = (z-1)^2$

$$dx = 2(z-1)\ dz$$

$$\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\ dx = \int \sqrt{\frac{z}{(z-1)^2}} \times 2(z-1)\ dz \qquad \textbf{(substitution)}$$

$$= \int 2z^{\frac{1}{2}}\ dz = 2 \times \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c \qquad \textbf{(intégration)}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}\right) + c \qquad \textbf{(substitution de z)}$$

b soit $z = x^2$ $\therefore\ dz = 2x\ dx$

$$\int 6x\, e^{x^2}\ dx = 3\int e^{x^2}(2x\ dx)$$

$$= 3\int e^z\ dz = 3e^z + c \qquad \textbf{(substitution et intégration)}$$

$$= 3e^{x^2} + c \qquad \textbf{(substitution de z)}$$

Essayez de résoudre

4 Trouvez :

a $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-3x^2}}\ dx$

b $\int (3-x)\, e^{6x - x^2}\ dx$

Example Intégral par substitution

5 Trouvez

a $\int \frac{5x}{3x^2 - 1}\, dx$ b $\int \frac{\sqrt{\ell n\, x}}{x}\, dx$

Solution

a soit $z = 3x^2 - 1$ $dz = 6x\, dx$

$$\int \frac{5x}{3x^2-1}\, dx = \frac{5}{6}\int \frac{6\, xdx}{3x^2-1} = \frac{5}{6}\int \frac{1}{z}\, dz \qquad \textbf{(substitution)}$$

$$= \frac{5}{6}\ln |z| + c = \frac{5}{6}\ln |3x^2 - 1| + c \qquad \textbf{(substitution et intégration)}$$

b soit $z = \ln x$ $\therefore\ dz = \frac{1}{x}\, dx$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx = \int \sqrt{\ln x}\ (\frac{1}{x}\, dx) = \int z^{\frac{1}{2}}\, dz \qquad \textbf{(substitution)}$$

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}[\ln (x)]^{\frac{3}{2}} + c \qquad \textbf{(substitution et intégration)}$$

Essayez de résoudre

5 Trouvez :

a $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}\, dx$ b $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

Pensé critique : En utilisant l'intégration par substituions démontrez les règles de primitives suivantes:

1- $\int [f(x)]^n\ f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ où $n \neq -1$

2- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, d(x) = \ln |f(x)| + c$ où $f(x) \neq 0$

Intégral par partition

Si y et z sont deux fonctions en x et dérivables, alors :

$$\frac{d}{dx}(y\, z) = y\frac{dz}{dx} + z\,\frac{dy}{dx}$$

par intégration les deux membres par rapport à x

$$\int \frac{d}{dx}(y\, z)\, dx = \int y\frac{dz}{dx}\, dx + \int z\,\frac{dy}{dx}\, dx$$

$$y\, z = \int y\, dz + \int z\, dy$$

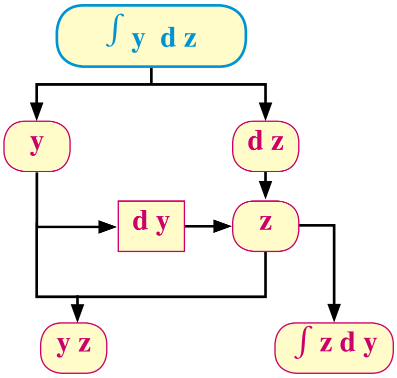
D'où : $\int y\, dz = y\, z - \int z\, dy$

Rappel

$dz = \frac{dz}{dx}\, dx$

$dy = \frac{dy}{dx}\, dx$

L'équation précédente est appelée la règle d'intégration par . partition, et utilisée pour trouver l'intégral du produit de deux fonctions l'une n'est pas la dérivée de l'autre, par le choix convenable de deux fonctions y et z de tel sorte que l'intégral du côté gauche est plus facile que le côté droit. On suit le diagramme ci-contre , comme montrent les exemples suivantes:



Exemple Intégral par partition

6 Trouvez :

a $\int x e^x\,dx$ 　　　 b $\int x^2 e^x\,dx$

Solution

a Pour trouver $\int x e^x\,dx$:

Soient : $y = x$, 　　 $dz = e^x\,dx$

$\therefore\ dy = dx$ 　　 $z = \int e^x\,dx = e^x$

$\because\ \int y\,dz = yz - \int z\,dy$

$\therefore\ \int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$

Remarque importante : quand on ajoute la constante à la fonction g ne change pas le résultat (démontrez)

b Pour trouver $\int x^2 e^x\,dx$:

Soient : $y = x^2$, 　　 $dz = e^x\,dx$

$dy = 2x\,dy$ 　　 $z = \int e^x\,dx = e^x$

$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx$

$= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$

$\int x e^x\,dx = e^x(x-1) + c$ de a

$= x^2 e^x - 2e^x(x-1) + c$

$= e^x[x^2 - 2x + 2] + c$

Essayez de résoudre

6 Trouvez :

a $\int x e^{-2x}\,dx$ 　　　 b $\int x^2 e^{x+3}\,dx$

Remarque que :

Le choix de y et dz, dépendent de :

1- dy plus simple que y 　　　 2- dz plus facile que l'intégral

Exemple Intégral par partition

7 Trouvez

a $\int \ln x \, dx$

b $\int x \ln x \, dx$

Solution

a **Soient :** $y = \ln x$ $\quad dz = dx$

$dy = \frac{1}{x} dx$ $\quad z = \int dx = x$

$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

b **Soient :** $y = \ln x$ $\quad dz = x\,dx$

$dy = \frac{1}{x} dx$ $\quad z = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2$

$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - \frac{1}{2}) + c$

Essayez de résoudre

7 Trouvez :

a $\int \ln (x+1) \, dx$

b $\int (\ln x \div \sqrt{x}) \, dx$

Exemple Intégral par partition

8 Trouvez :

a $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$

b $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$

Solution

a Remarquez que $(x+1)^{-2}$ plus facile à intégré

Soit $y = x e^x$ $\quad dz = (x+1)^{-2} dx$

$dy = (x e^x + e^x) dx$ $\quad z = \frac{-1}{x+1}$

$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = -\frac{x e^x}{x+1} - \int \frac{-1}{x+1} \times e^x (x+1) \, dx$

$= -\frac{x e^x}{x+1} + \int e^x dx$

$= \frac{-x e^x + e^x (x+1)}{x+1} + c = \frac{e^x}{x+1} + c$

b Soient $y = 4x$ $\qquad dz = (2x+1)^{-\frac{1}{3}}\, dx$

$dy = 4\, dx$ $\qquad z = \frac{3}{2 \times 2}\,(2x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$\int \frac{4x}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx = 3x\,(2x+1)^{\frac{2}{3}} - \int \frac{3}{4}\,(2x+1)^{\frac{2}{3}} \times 4\, dx$$

$$= 3x\,(2x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3 \times 3}{5 \times 2}\,(2x+1)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{10}\,(2x+1)^{\frac{2}{3}}\,[10x - 3\,(2x+1)] + c$$

$$= \frac{3}{10}(2x+1)^{\frac{2}{3}}\,(4x - 7) + c$$

Essayez de résoudre

8 Trouvez :

a $\int \frac{3x+5}{e^{2x}}\, dx$ $\qquad$ **b** $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx$

Pensez critique : Pouvez vous trouvez $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx$ par substituions ? Expliquez

Quelques applications sur l'intégral infinie

Si on sait que la fonction g détermine la pente de la tangente (ou fonction de bénéfice ou taux de variation d'une fonction) en un point de la courbe de la fonction f, alors on peut connaitre la fonction F par l'intégration infinie de la fonction g, tel que : $f(x) = \int g(x)\, dx$

Remarque que cette primitive ne donne pas une seule fonction parce qu'il contient la constante c qu'on peut la déterminer des informations données.

Exemple Equation de la courbe d'une fonction

9 Si la pente de la tangente de la courbe de la fonction f en un point (x ; y) de cette courbe est donnée par la relation $g(x) = \frac{x\,e^{x}}{(x+1)^2}$, trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point (1 ; 2 e) .

Solution

Soit l'équation de la courbe est $y = f(x)$ $\qquad \therefore\ f(x) = \int g(x)\, dx$

$\therefore\ f(x) = \int \frac{x e^{x}}{(x+1)^2}\, dx = \frac{e^{x}}{x+1} + c$ $\qquad$ [de l'exemple 8 (a)]

$\because$ la courbe passe par le point (1 ; 2e), alors il vérifie l'équation

$\therefore\ 2e = \frac{e}{(1+1)^2} + c$

$\therefore\ c = \frac{7e}{4}$ et $f(x) = \frac{e^{x}}{x+1} + \frac{7}{4}\, e$

Essayez de résoudre

9. Trouvez l'équation de la courbe passant par le point (0 ;1) et dont la pente de la tangente en un point (x ;y) de la courbe est égale à $x\sqrt{x^2+1}$

Exercices 4-1

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1. $\int x(x^2+3)^5$ est égale à

   a) $\frac{1}{6}(x^2+3)^6+c$ b) $\frac{1}{12}(x^2+3)^6+c$ c) $\frac{1}{4}(x^2+3)^4+c$ d) $\frac{1}{8}(x^2+3)^4+c$

2. Si $\int(2x+3)\ln x\,dx = yz - \int z\,dy$, alors y z est éqal à

   a) $2x\ln x$ b) $(2x+3)\ln x$ c) $\frac{1}{2}(2x+3)\ln x$ d) $x(x+3)\ln x$

3. Si $\int(2x-1)e^{2x+3}\,dx = yz - \int z\,dy$, alors $\int z\,dy$ est égal à

   a) $e^{2x+3}+c$ b) $\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$ c) $-e^{2x+3}+c$ d) $-\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$

En utilisant la substitution convenable trouvez les primitives suivantes :

4. $\int x(x-2)^4\,dx$
5. $\int x^2(x-2)^3\,dx$
6. $\int x^3(x^2-1)^5\,dx$
7. $\int x\sqrt{x+4}\,dx$
8. $\int(x^2-1)\sqrt{x+1}\,dx$
9. $\int x^5(x^2+3)^4\,dx$
10. $\int\frac{x}{3x^2+2}\,dx$
11. $\int\frac{x}{x+1}\,dx$
12. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$
13. $\int\frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}\,dx$
14. $\int x\,e^{-x^2}\,dx$
15. $\int\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}\,dx$
16. $\int\ln 5x\,\frac{dx}{x}$
17. $\int(\ln x)^3\,\frac{dx}{x}$
18. $\int\frac{1}{x\ln x}\,dx$

En utilisant la partition convenable trouvez les primitives suivantes :

19. $\int 4x\,e^{2x}\,dx$
20. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$
21. $\int\frac{x}{e^{2x}}\,dx$
22. $\int x^3\ln x\,dx$
23. $\int\ln x^2\,dx$
24. $\int(\ln x)^2\,dx$
25. $\int\ln x\,\frac{dx}{x^3}$
26. $\int(x+1)^2 e^{2x}\,dx$
27. $\int x(\ln x)^2\,dx$

Répondez aux questions suivantes :

28. Trouvez l'équation de la courbe passant par le point A (2 ; 3) et dont la pente de la normale en un point (x ; y) de la courbe est $3-x$.
29. Si la pente de la tangente à une courbe en un point (x ; y) de cette courbe est $x\sqrt{x+1}$, trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point $(0\,;\,\frac{11}{15})$
30. Déterminez l'équation de la courbe $y=f(x)$ si $\frac{d^2y}{dx^2}=ax+b$ où a et b sont deux constants et le point (0 ; 2) est un point d'inflexion et le point (1 ; 0) est un point minimum relatif à la courbe. Puis trouvez le point maximum relatif à cette courbe

4 - 2 Intégral des fonctions trigonométriques

Allez apprendre

- Règles d'intégrations des fonctions trigonométriques

Vocabulaire de bas

- Règle
- Fonctions trigonométrique
- Tableau d'intégrations

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique

Réfléchissez et discutez

Pour trouver la primitive d'une fonction f, on cherche une autre fonction F dont la dérivée est la première fonction f, c'est-à-dire

$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ d'où:

$\int f(x)\, dx = F(x) + c$ où c est une constante.

Laquelle des relations suivantes est vraie?

a $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

b $\int \sin x\, dx = \cos x + c$

c $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + c$

d $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \operatorname{cotg} x + c$

Remarquez que: si vous connaissez bien les dérivées des fonctions trigonométriques, alors c'est facile à trouver leurs primitives .

D'après les études des dérivations des fonctions trigonométriques et le tableau des primitives suivant pour quelques fonctions trigonométriques, comparer entre les dérivées des fonctions trigonométriques, puis déduisez leur primitives et complétez la tableau.

[illegible]
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx =$
$\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx =$
$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\, dx =$

Rappelez-vous

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = -\sec x \operatorname{tg} x$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Vérifiez vos réponses en utilisant la définition de la dérivée réciproque .

Exemple
tableau de primitives

1. Trouvez les primitives suivantes:

a $\int (\sin x + \cos x)\, d x$ **b** $\int \sec x (\sec x - tg x)\, d x$

c $\int \frac{1}{1 - \cos^2 x}\, d x$ **d** $\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}\, d x$

Solution

a $\int (\sin x + \cos x)\, d x = \int \sin x\, d x + \int \cos x\, d x$
$= - \cos x + \sin x + c$

b $\int (\sec x - tg x) \sec x\, d x = \int \sec^2 x\, d x - \int \sec x\, tg x\, d x$
$= tg x - \sec x + c$

c $\int \frac{1}{1 - \cos^2 x}\, d x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, d x = \int cosec^2 x\, d x = - cotg x + c$

d $\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}\, d x = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, d x = \int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$
$= \int cosec x\, cotg x\, d x = - cosec x + c$

Rappelez-vous

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 + tg^2 x = \sec^2 x$

$cotg^2 x + 1 = cosec^2 x$

Essayez de résoudre

1. Trouvez:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)\, d x$ **b** $\int cosec x (\cos^2 x + tg x)\, dx$

c $\int cosec x (cotg x - cosec x)\, d x$ **d** $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}\, d x$

Remarque importante :

On sait que : $\int x^n\, d x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ **(1)** , $\int \sin x\, d x = - \cos x + c$ **(2)**

On peut généraliser tous les résultats précédants des primitives en remarquant que si on ajoute (multiplie) un constant à la variable x, alors l'intégral garde la même forme précédant en divisant par cette constante.

Pour cela on trouve que les formes (1) et (2) sont :

$$\int (a x + b)^n\, d x = \frac{(a x + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

$$, \int \sin (a x + b)\, d x = - \frac{1}{a} \cos (a x + b) + c$$

Exemple
formes usuelles de primitives

(2) Trouvez :

a) $\int \sin(2x - 5)\, dx$

b) $\int \sec^2(5 - 3x)\, dx$

c) $\int \text{cosec}^2\left(\frac{x+3}{2}\right) dx$

d) $\int \sec 2x \text{ tg } 2x\, dx$

Solution

a) $\int \sin(2x - 5)\, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + c$

b) $\int \text{cosec}^2(5 - 3x)\, dx = -\frac{1}{3} \text{ tg } (5 - 3x) + c$

c) $\int \text{cosec}^2\left(\frac{1}{2} x + \frac{3}{2}\right) dx = -2 \text{ cotg } \left(\frac{x+3}{2}\right) + c$

d) $\int \sec 2x \text{ tg } 2x\, dx = \frac{1}{2} \text{ cosec } 2x + c$

Essayez de résoudre

(2) Trouvez :

a) $\int (\sin 3x - \sec^2 2x)\, dx$

b) $\int 6 \sec 2 x (\tan 2x + \cos^2 2x)\, dx$

c) $\int [1 + \text{cotg}^2 (3x - 1)]\, dx$

d) $\int \frac{\sin^2(2x - 3)}{1 - \cos(2x - 3)}\, dx$

Exemple
applications

(3) Si la pente de la tangente d'une courbe en un point (x ; y) de cette courbe est donnée par la relation : $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x$, trouvez l'équation de la courbe sachant qu'elle passe par le point $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$

Solution

$\because$ la pente de la tangente à la courbe en un point : $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x$

$\therefore$ l'équation de la courbe : $y = \int \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int \sin x \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \cos 2x + c = -\frac{1}{4} \cos 2x + c$$

$\because$ la courbe passe par le point $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$

$\therefore$ Il vérifie son équation

$1 = -\frac{1}{4} \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + c$ $\qquad \therefore\ c = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

$\therefore$ l'équation de la courbe est : $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{9}{8}$

Rappelez-vous

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2 \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez l'équation de la courbe passant par le point A (1 ; -2) et dont la pente de la tangente en un point (x ;y) de la courbe est : $\frac{dy}{dx} = 3\pi \cos \pi x - 2\pi \sin \pi x$

Exercice 4-2

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1. Si $\frac{dy}{dx} = \text{cosec}^2 x$, $y = 2$ pour $x = \frac{\pi}{4}$, alors y est égale à

   a) $-2 - \text{cotg } x$ b) $2 - \text{cotg } x$ c) $-3 - \text{cotg } x$ d) $3 - \text{cotg } x$

2. $\int 2\cos^2 x \, dx$ est égale à

   a) $x + \frac{1}{2}\sin 2x + c$ b) $x + 2\sin 2x + c$

   c) $x - \frac{1}{2}\sin 2x + c$ d) $x - \sin 2x + c$

3. $\int \sec^4 x \, \text{tg } x \, dx$ est égale à

   a) $\frac{1}{5}\sec^5 x + c$ b) $\frac{1}{4}\sec^4 x + c$

   c) $\frac{1}{3}\text{tg}^3 x + c$ d) $-\frac{1}{3}\tan^3 x + c$

4. $\int (3x + 2)\sin x \, dx$ est égale à

   a) $(3x + 2)\cos x + 3\sin x + c$ b) $-(3x + 2)\cos x + 3\sin x + c$

   c) $(3x + 1)\cos x + 2\sin x + c$ d) $-(x + 1)\cos x - 2\sin x + c$

Trouvez les primitives suivantes :

5. $\int \sqrt{3} \cos x \, dx$
6. $\int \text{cosec}^2 (2x + 3) \, dx$
7. $\int \text{tg } x \cos x \, dx$
8. $\int \sin x \cos x \, dx$
9. $\int (1 + \tan^2 x)\cos^2 x \, dx$
10. $\int (\sin x - \cos x)^2 \, dx$
11. $\int \cos^3 x \sin x \, dx$
12. $\int \sin^5 x \cos x \, dx$
13. $\int x^2 \cos (x^3 + 5) \, dx$
14. $\int (3 + \sin x)^5 \cos x \, dx$
15. $\int \sec^5 x \, \text{tg } x \, dx$
16. $\int \frac{\cos^3 x - 4}{\cos^2 x} \, dx$
17. $\int (\cos^2 x + \cos x) \, dx$
18. $\int (\cos x + \sec x)^2 dx$
19. $\int (\tan^2 x + 2\sin^2 x) \, dx$

Répondez aux questions suivantes

20. Si $\frac{dy}{dx} = 7 - \sin^2 x$, trouvez y en fonction de x si $y = 5$ quand $x = 0$

21. Trouvez l'équation de la courbe passant par le point $(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi^2}{4} + 9)$ dont la pente de la tangente en un point $(x ; y)$ de la courbe est donnée par la relation : $m = 2x + \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2}$

22. La pente de la tangente d'une courbe en un point est égale à $-a \, \text{cosec}^2 x$ où a est un constant. Si la courbe passe par les points $(\frac{\pi}{4} ; 5)$, $(\frac{3\pi}{4} ; 1)$, trouvez l'équation de la courbe.

4 - 3 Intégral finie

Allez apprendre

- Le concept de l'intégral finie
- Utilisation du théorème fondamental de la différentielle et de l'intégration pour trouver l'intégral finie.
- Propriétés de l'intégral finie

Vocabulaire de bas

- Intégral finie

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Réfléchissez et discutez

Si y = f(x), et la pente de la tangente en un point de la courbe de la fonction est :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x + 3$$

Pouvez-vous trouver une valeur exacte de f(3) ; f(5) ; f(5) - f(3) ? Expliquez votre réponse .

Remarquez que

1 d'après la définition de l'intégral infinie:

$$y = \int f'(x)\, dx = f(x) + c$$

où c est une constante sa valeur ne dépend pas de x, on doit la garder dans l'intégration pour qu'il contient tous les fonctions dont le taux de variation est f(x), donc l'intégral infinie ne donne pas une valeur exacte de la variable x .

2 Si la valeur de l'intégral en $x = a$ est $f(a) + c$
et sa valeur en $x = b$ est $f(b) + c$

$\therefore$ La différence entre les valeurs de l'intégral en $x = a$ et $x = b$

est égale à f(b) – f(a),qui donne une valeur exacte (pour n'importe que valeur de c) et sera noté par $\int_a^b f'(x)\, dx$ tel que :

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

Cette règle est appelée Intégral finie.

Apprendr

Théorème fondamental de l'intégration

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a ; b] et F une primitive quelconque de f sur [a ; b] On a :
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Remarque:

1 $\int_a^b f(x)\,dx$ est appelée Intégral finie, et se lit (intégral f(x) dx de a à b) c'est un nombre réel qui dépend de :

a Les deux nombres a et b respectivement

b La règle de f

La variable x étant une variable muette, on a donc:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(z)\,dz \ldots\ldots$$

2 Nous écrirons la différence : f(b) - f(a) sous la forme suivante $[f(x)]_a^b$ ou $f(x)\,|_a^b$

3 On peut obtenir l'intégral finie par calculer la primitive sans mettre la constante c puis on remplace la variable par les deux termes de l'intégral.

4 On applique toutes les règles des primitives et le tableau des primitives usuelles quand on calcule l'intégral finie d'une fonction continue. Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle [a, b]

Alors:

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ où $k \in R$

Exemple

Calcul la valeur d'une intégral finie

1 Trouvez l' intégral finie de la fonction f de $x = -2$ à $x = 4$ tel que $f(x) = 3x^2 - 2$

Solution

La fonction f est un polynôme continue dans R

$$\therefore \int_{-2}^{4} (3x^2 - 2)\, d\, x = [x^3 - 2x]_{-2}^{4}$$
$$= [(4)^3 - 2(4)] - [(-2)^3 - (-4)]$$
$$= 64 - 8 + 8 - 4 = 60 \in R$$

Essayez de résoudre

1 Trouvez la valeur dans ce qui suit :

a $\int_{-1}^{2} (2x + 3)\, d\, x$ b $\int_{0}^{5} \frac{3}{\sqrt{n+4}}\, d\, n$ c $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta\, d\, \theta$

Théorème Si la fonction est continue sur l'intervalle [a;b] alors elle est intégrable sur cette intervalle.

Pensé critique

Quelle est la différence entre l'intégral finie et l'intégral infinie ? Expliquez ?

Propriétés de l'intégral finie

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a, b], c ∈] a, b [, alors:

1. $\int_{b}^{a} f(x)\, d\, x = - \int_{a}^{b} f(x)\, d\, x$
2. $\int_{a}^{a} f(x)\, d\, x = 0$
3. $\int_{a}^{b} f(x)\, d\, x = \int_{a}^{c} f(x)\, d\, x + \int_{c}^{b} f(x)\, d\, x$

Exemple Calcule la valeur d'une Intégral

2 Si f est une fonction continue sur R et $\int_{1}^{3} f(x)\, d\, x = 6$, $\int_{5}^{3} f(x) = -14$, Trouvez $\int_{1}^{5} f(x)\, d\, x$

Solution

$\because$ f est une fonction continue sur R et x = 3 partage l'intervalle [1, 5]

$$\therefore \int_{1}^{5} f(x)\, d\, x = \int_{1}^{3} f(x)\, d\, x + \int_{3}^{5} f(x)\, d\, x \qquad \text{Propriété (3)}$$
$$= \int_{1}^{3} f(x)\, d\, x - \int_{5}^{3} f(x)\, d\, x \qquad \text{Propriété (1)}$$
$$= 6 - (-14) = 20$$

Essayez de résoudre

2 Si f est une fonction continue sur R et $\int_{-1}^{4} f(x)\, d\, x = 255$, $\int_{2}^{-1} f(x)\, d\, x = -15$, Trouvez :

$\int_{2}^{4} f(x)\, d\, x$

Exemple Calcule la valeur d'une Intégral finie

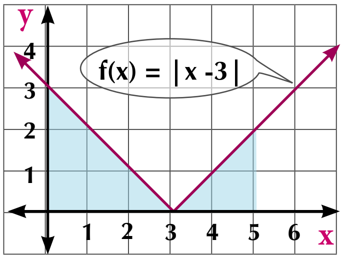
3 Trouvez $\int_0^5 |x - 3| \, dx$

Solution

D'après la définition de la fonction valeur absolu on a $|x - 3| = \begin{cases} -(x - 3) & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

f est continue en $x = 3$

$$\int_0^5 |x - 3| \, dx = \int_0^3 |x - 3| \, dx + \int_3^5 |x - 3| \, dx$$
$$= \int_0^3 (3 - x) \, dx + \int_3^5 (x - 3) \, dx$$
$$= \left[3x - \frac{x2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{x2}{2} - 3x\right]_3^5$$
$$= \left(9 - \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{25}{2} - 15 - \frac{9}{2} + 9\right) = \frac{13}{2}$$



Remarquez que l'aire de la partie colorée est gale a $\frac{13}{2}$ unités carrées

Essayez de résoudre

3 Trouvez :

a $\int_{-4}^{2} |x + 1| \, dx$ b $\int_{-3}^{3} |x^2 - 4| \, dx$

Exemple Calcule la valeur d'une Intégral finie par substituions

4 Trouvez $\int_0^3 x \sqrt{x^2 + 3} \, dx$

Solution

On peut obtenir l'intégral finie par calculer la primitive sans mettre la constante c puis on remplace la variable par les deux termes de l'intégral :

Premièrement:

pour trouver $\int x \sqrt{x^2 + 3} \, dx$ on pose $z = x^2 + 3$ $\therefore dz = 2x \, dx$

$$\therefore \int x \sqrt{x^2 + 3} \, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 + 3} \, (2x \, dx) = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} \, dz \quad \textbf{(substitution)}$$
$$= \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c \quad \textbf{(integration)}$$
$$= \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 3)^3} + c \quad \textbf{(substitution par z)}$$

Deuxièment:

$$\int_0^3 \sqrt{x^2 + 3} \, dx = \left[\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 3)^3}\right]_0^3$$
$$\frac{1}{3} \left[\sqrt{(12)^3} - \sqrt{(3)^3}\right] = 7\sqrt{3}$$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez :

a) $\int_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\ d\,x$ b) $\int_{-2}^2 x^3\sqrt{x^2+3}\ d\,x$

Remarquez que

1. 1) On peut résoudre l'exemple 4 directement par trouver les valeurs de z correspondants aux valeurs de termes de l'intégral (x = 0 , x = 3)

Si x = 0 $\therefore$ z = 3 , Si x = 3 z = 12

$$\therefore \int_0^3 x\sqrt{x^2+3}\ d\,x = \frac{1}{2}\int_3^{12} z^{\frac{1}{2}} d\,x = [\frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}}]_3^{12}$$

$$= \frac{1}{3}[\sqrt{(12)^3} - \sqrt{(3)^3}] = 7\sqrt{3}$$

2. Dans **la partie Essayez de résoudre** 4 b: $f(x) = x^3\sqrt{x^2+3}$ **une fonction impaire**

Dans **la partie Essayez de résoudre** 3b: $f(x) = |x^2 - 4|$ **une fonction paire**

Les fonctions paires et impaires ont les propriétés suivantes dans l'intégral finie:

> **1.** Si la fonction est continue et impaire sur l'intervalle [-a , a], alors:
>
> $$\int_{-a}^{a} f(x)\ d\,x = \text{zero}$$
>
> **2.** Si la fonction est continue et paire sur l'intervalle [-a , a], alors :
>
> $$\int_{-a}^{a} f(x)\ d\,x = 2\int_0^a f(x)\ d\,x$$

En utilisant les propriétés précédantes, vérifiez vos réponses dans la partie Essayez de résoudre 3,4

Exemple

Intégral finie des fonctions impaires et paires

(5) Trouvez :

a) $\int_{-2}^2 \frac{x^3 - 3x}{x^2+1}\ dx$ b) $\int_{-3}^3 (x^2 - 1)\ d\,x$

Solution

a) la fonction est continue sur R

$$\because\ f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3 - 3x}{x^2+1} = -f(x)$$

$\therefore$ **f est impaire et on a :** $\int_{-2}^2 \frac{x^3 - 3x}{x^2+1} = \text{zero}$

b f est une fonction polynôme continue sur R

$\because$ $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$

$\therefore$ f est paire et on a : $\int_{-3}^{3} (x^2 - 1)\, dx = 2 \int_{0}^{3} (x^2 - 1)\, dx$

$= 2 [\frac{1}{3} x^3 - x]_0^3 = 2 \times 6 = 12$

Essayez de résoudre

5 Trouvez

a $\int_{-3}^{3} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

b $\int_{-\pi}^{\pi} (4 + \pi \cos 2x)\, dx$

Pensé critique

1 Si f est une fonction impaire et continue sur l'intervalle [-3 , 5] , $\int_{3}^{5} f(x)\, dx = 9$? quelle est la valeur de $\int_{-3}^{5} f(x)\, dx$

2 Si f est une fonction paire et continue sur l'intervalle [-4, 4] , $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx = 20$ et $\int_{0}^{2} f(x)\, dx = 6$, quelle est la valeur de $\int_{-4}^{-2} f(x)\, dx$?

Exercices 4 - 3

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1 Si $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\, dx = 16$, alors $\int_{3}^{5} f(x)\, dx$ est égale à:

a -28 **b** -4 **c** 4 **d** 28

2 Si $f(x) = |x|$, alors $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ est égale à:

a -1 **b** zero **c** 2 **d** 4

Trouvez la valeur dans ce qui suit :

3 $\int_{-1}^{3} x^3\, dx$

4 $\int_{1}^{3} (3x^2 - 2)\, dx$

5 $\int_{0}^{4} (2x + 1)^{\frac{3}{2}}\, dx$

6 $\int_{4}^{0} \frac{dt}{\sqrt{8 - t}}$

7 $\int_{0}^{2} x(x^2 - 3)^2\, dx$

8 $\int_{0}^{2} x^2 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx$

9 $\int_{-1}^{3} |x - 1|\, dx$

10 $\int_{-4}^{0} x (x + 4)^3\, dx$

11 $\int_{10}^{3} x \sqrt{x + 1}\, dx$

12 $\int_{0}^{1} 2 \sin \pi z\, dz$

13 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{tg } z \sec^2 z\, dz$

14 $\int_{0}^{3} (2x - 7e^x)\, dx$

Répondez à ce qui suit :

15 Si $\int_1^5 f(x)\,dx = 10$ et $\int_1^5 g(x)\,dx = -2$, calculez la valeur de

a $\int_1^5 [f(x) + g(x)]\,dx$ **b** $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ **c** $\int_5^1 3\,g(x)\,dx$

16 Si f est une fonction continue sur l'intervalle [-4 , 4] et $\int_0^4 f(x)\,dx = 3$.

calculez la valeur de

a $\int_0^4 [f(x) + 2]\,dx$ **b** $\int_{-4}^4 f(x)\,dx$, f est impaire

c $\int_{-4}^4 f(x)\,dx$, f est paire

17 Si $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ quand } x < 2 \\ x \text{ quand } x \geqslant 2 \end{cases}$, trouvez $\int_0^6 f(x)\,dx$

Les aires dans le plan

4 - 4

Réfléchissez et discutez

1. Calculez l'aire de la région colorée dans les figures suivantes géométriquement.

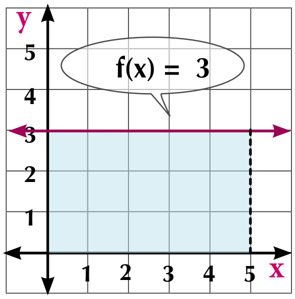


Figure (1)

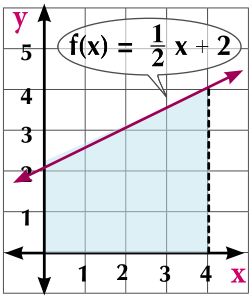


Figure (2)

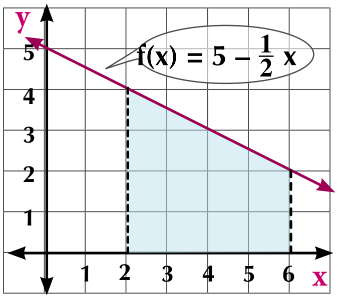


Figure (3)

2. pour chaque figure calculez $\int_a^b f(x)\,dx$ où f(x) est l'équation de la courbe et les droites x = a , x = b déterminent la région colorée.

3. Comparez l'aire de chaque figure et la valeur de l'intégral ; que peut-on déduire ?

l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses sur l'intervalle [a , b]

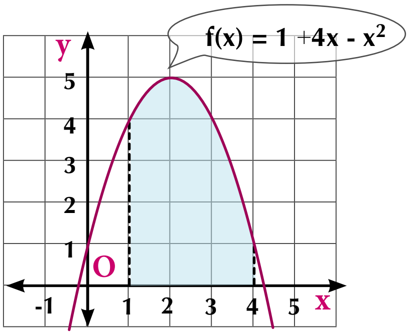
Théorème Si la fonction f est continue sur l'intervalle [a, b] et f (x) ⩾ 0 dans cet intervalle. A est l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses et les droites x = a et x = b, alors:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple

L'aire desous la courbe

1 La figure ci-contre montre la courbe représentative de la fonction f où $f(x) = 1 + 4x - x^2$. calculer l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses et les droites x = 1, x = 4



Allez apprendre

- Connaître l'aire comme intégral finie
- Calculer l'aire limitée par la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses sur un intervalle fermé
- Calculer l'aire de la région comprise entre les courbes sécantes

Vocabulaire de bas

- Aire
- Unité carrée

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme

Solution

f est continue sur l'intervalle [1, 4] et $f(x) > 0$ pour tout $x \in [1, 4]$

$$\therefore A = \int_1^4 f(x)\,dx \qquad = \int_1^4 (1 + 4x - x^2)\,dx$$

$$= [x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3]_1^4 \qquad = [4 + 32 - \frac{64}{3}] - [1 + 2 - \frac{1}{3}]$$

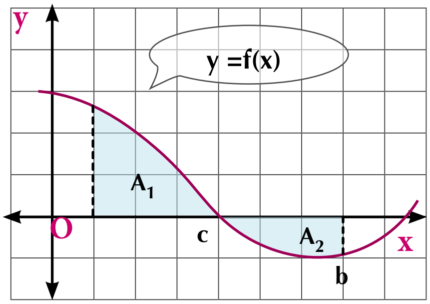
$$= 36 - \frac{64}{3} - 3 + \frac{1}{3} = 12 \text{ unité d'aire}$$

Essayez de résoudre

1 Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 2$ où $f(x) = 3x^2 + 1$

Pensé critique

Si la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en $x = c$ où $c \in [a, b]$. Expliquez comment calculez l'aire au dessus l'axe des abscisses et limitée par la courbe de la fonction et l'une de deux droites $x = a$; $x = b$ (la région A_1).



Remarquez que :

- Pour trouver l'aire, on calcule les zéros de la fonction même si on a les bornes de l'intégral qui partage le domaine de la fonction en des intervalles
- Etude de signe de la fonction sur ces intervalles s'il existent. Si la fonction est :
  - Positive, $f(x) > 0$ sur l'intervalle [a; c] , alors $A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$
  - Négative, $f(x) < 0$ sur l'intervalle [c; b], alors $A_2 = |\int_c^b f(x)\,dx|$

Exemple

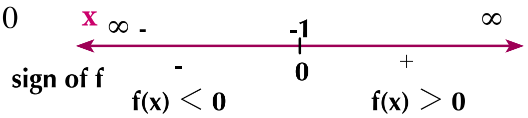
L'aire au dessus l'axe des abscisses et la courbe d'une fonction

2 Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f: $f(x) = \sqrt[3]{2x + 2}$ et la droite $x = 3$ au dessus l'axe des abscisses .

Solution

On calcule les zéros de la fonction en mettant $f(x) = 0$

$\therefore \sqrt[3]{2x + 2} = 0$ donc $\therefore x = -1$



$\therefore$ l'aire demandé $A = \int_{-1}^3 f(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^3 (2x + 2)^{\frac{1}{3}}\,dx = [\frac{3}{4 \times 2}(2x + 2)^{\frac{4}{3}}]_{-1}^3$$

$$= \frac{3}{8}[8^{\frac{4}{3}} - 0] = \frac{3}{8}(2^3)^{\frac{4}{3}} = 6 \text{ unité carrée}$$

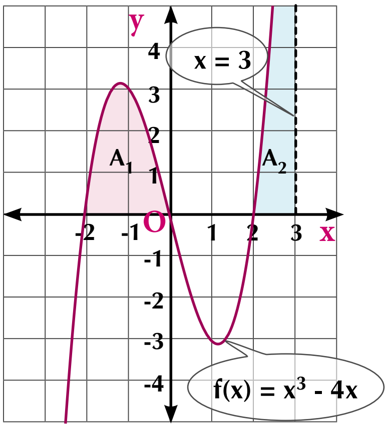
Essayez de résoudre

(2) Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f: $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ et la droite x = 4 et situeé au dessus de l'axe des abscisses.

Exemple

l'aire limitée par la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses

(3) Si f: $]-\infty, 3] \rightarrow R$ où $f(x) = x^3 - 4x$. Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction et située au dessus l'axe des abscisses.

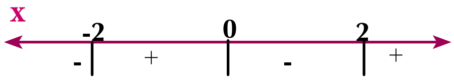


Solution

On calcule les points d'intersections de la courbe avec l'axe des abscisses (les zéros de la fonction)

$f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x (x - 2) (x + 2)$

Quand $f(x) = 0$ $\therefore x = 0$ or $x = 2$ or $x = -2$



D'après l'etude du signe de la fonction on a

$f(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle [-2; 0] sur l'intervalle [2, 3]

$\therefore$ l'aire demandé $A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 + 4x)\, dx + \int_{2}^{3} (x3 - 4x)\, dx$

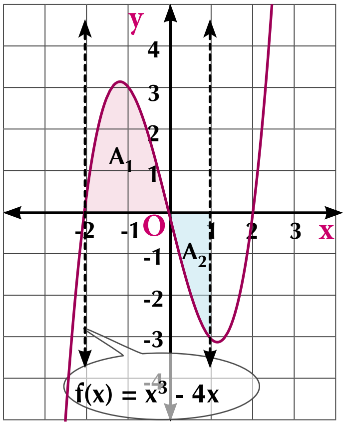
$= \frac{1}{4} x^4 - 2x2]^0_{-2} + [\frac{1}{4} x^4 - 2x^2]^3_2$

$= (0 - (-4)) + (\frac{81}{4} - 18 - (-4))$

$= \frac{121}{4}$ Unité carrée

Remarque importante

Pour déterminer l'aire comprise entre la courbe de la fonction et l'axe de abscisses et les droites x = -2 ; x = 1, comme montre la figure ci-contre .



On trouve que:

$f(x) \geqslant 0$ quand $x \in [-2, 0]$, $f(x) \leqslant 0$ quand $x \in [0, 1]$

$\therefore$ l'aire demandée $A = A_1 + A_2$

$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 4x)\, dx \right|$

$= [\frac{1}{4} x^4 - 2x^2]^0_{-2} + \left| [\frac{1}{4} x^4 - 2x^2]^1_0 \right|$

$= 4 + \left| (\frac{1}{4} - 2) - 0 \right| = 4 + \left| -\frac{7}{4} \right| = \frac{23}{4}$ unité carrée .

Essayez de résoudre

3. Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $y = 3 + 2x - x^2$ et l'axe des abscisses.

Pensé critique

Calculez l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $y = 3 + 2x - x^2$ et les droites $x = -1$, $x = 4$ et $y = 0$

Exemple

Application Architecture des aires

4. Un Architect à désigner la rentrée d'une hôtel à la forme d'un arc d'équation $y = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 7)$ où x mesuré en mètre, cette entrée a été couverte par de glaces dont le mètre carré coûte 1500 L.E. Quel est le coûte des glaces?

Solution

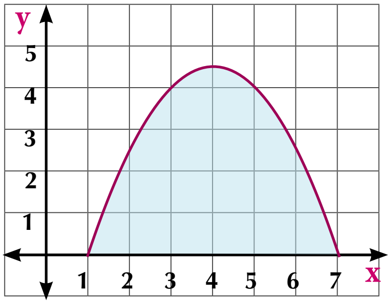
Modélisation du problème :

Le coût de glaces = l'aire des glaces en mètre carré × le prix d'un mètre carré

Soit le prix total = P L.E., A = l'aire de glaces en mètre carré

$\therefore \quad P = 1500 \times A$ ①

Calcul l'aire des glaces :



Soit le plan horizontale l'axe des abscisses ; dont l'équation y = 0 l'équation de l'arc de la rentrée $y = f(x)$ tel que :

$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 7)$

$\therefore$ Si $f(x) = 0$ alors : $x = 1$ ou $x = 7$

alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [1, 7]$

L'aire $A = \int_1^7 -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 7)\,dx = \int_1^7 (-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2})\,dx$

$= [-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{7}{2}x]_1^7 = \frac{49}{3} - (-\frac{5}{3}) = 18$ ② de ①, ②

$\therefore k = 1500 \times 18 = 27000$

c-a-d: **le coût de couvrir l'entrée de l'hôtel par de glaces est 27000 L.E**

Essayez de résoudre

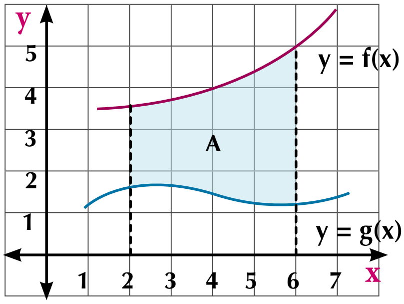
4. Si le coût de couvrir d'un mètre carré des couloirs de l'hôtel par de granite est 400 L.E. Si on a couvrest 5 couloirs de même aire par de granite, chacun limité par la courbe de la fonction f et les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ où $f(x) = 12 - \frac{1}{3}x^2$, **Calculez le prix de couvrir les 5 couloirs**.

2) L'aire de la région comprise entre deux courbes

Définition

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle [a, b], et $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'aire de la région comprise entre les deux courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par la relation

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Dans la figure ci-contre remarquez que :

f et g sont continues sur l'intervalle [a ; b]

$f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [a ; b]$

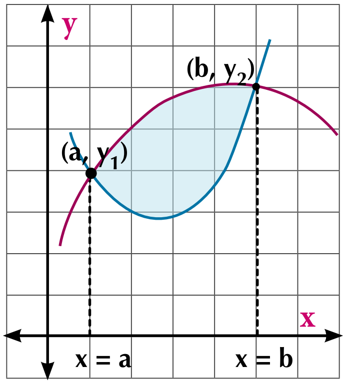
Si l'aire comprise entre la courbe de f(x) et l'axe des abscisses = A_1

et l'aire comprise entre la courbe de g(x) et l'axe des abscisses = A_2

alors l'aire comprise entre la courbe de f(x) et g(x) = $A_1 - A_2$

Donc : $A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

Remarque importante: Si la région est comprise entre deux courbes sécantes, alors les bornes de l'intégral sont les abscisses des points d'intersections.



Exemple

L'aire de la région comprise entre deux courbes

5) Trouvez l'aire de la surface limitée par la courbe représentative de fonction $y_1 = \sqrt{x}$, droite $y_2 = x - 2$ et l'axe des ordonnées

Solution

Pour trouver les abscisses des points d'intersections on met $y_1 = y_2$

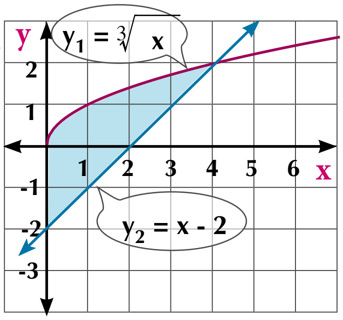
$x - 2 = \sqrt{x}$ En élévant les deux membres au carré

$x^2 - 4x + 4 = x$ donc : $x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$ $\therefore x = 1$ ou $x = 4$

en $x = 1$ $y_1 = \sqrt{1} = 1$, $y_2 = 1 - 2 = -1$

donc . $y_1 \neq y_2$



$\therefore$ alors si $x = 1$ il n'y a pas de points d'intersection pour les deux courbes quand $x = 4$ $y_1 = \sqrt{4} = 2$, $y_2 = 4 - 2 = 2$ $\therefore y_1 = y_2$

$\therefore$ alors les bornes de l'intégral sont $x = 4$ et $x = 0$(l'axe des ordonnées) les courbes y_1 et y_2 sont continues sur l'intervalle [0 ;4] ; on choisit une valeur dans l'intervalle]0, 4[soit $x = 2$

en $x = 2$ $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = 2 - 2 = 0$

c-a-d $y_1 \geqslant y_2$ pour tout $x \in [0, 4]$

$\therefore$ l'air de la région $= \int_0^4 (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx$

$= [\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + 2x]_0^4 = \frac{2}{3} (2^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} (16) + 2 (4) = \frac{16}{3} - 8 + 8 = \frac{16}{3}$ unité d'aire

Essayez de résoudre

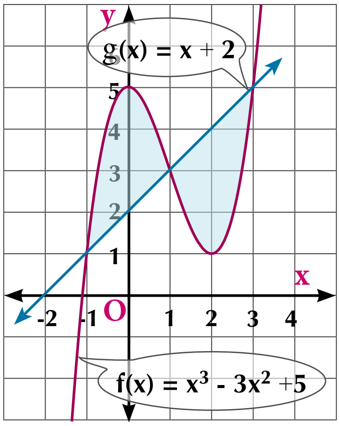
5 Trouvez l'aire de la surface limitée par la courbe représentative de la fonction f et la fonctions g où : $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = 3 - (x + 1)^2$

Exemple

plusieurs régions entre deux courbes sécantes

6 Trouvez l'aire de la surface limitée par la courbe représentative de la fonction f et la fonction g où :

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ et $g(x) = x + 2$



Solution:

- Pour trouver les abscisses des points d'intersections :

On met $f(x) = g(x)$

$x^3 - 3x^2 + 5 = x + 2$

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

$(x^3 - 3x^2) - (x - 3) = 0$

$x^2 (x - 3) - (x - 3) = 0$

$(x - 3) (x - 1) (x + 1) = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

- L'intégral sera donc sur les intervalles [-1 ;1] et [1 ;3], pour trouver l'aire :

  $A = A_1 + A_2$

$A = |\int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx| + |\int_{1}^{3} [f(x) - g(x)]\, dx|$

$= |\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 5 - x - 2)\, dx| + |\int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx|$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x]_{-1}^{1}| + |[\frac{1}{4} x^4 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x]_1^3|$

$= |-2 + 6| + |26 - 30| = 4 + 4 = 8$ unité d'aire

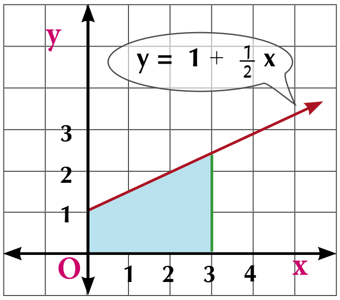
Essayez de résoudre

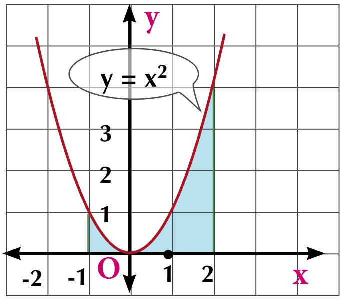
6 Une société de publicité produit une affiche pour commercialiser un produit sous la forme d'une région limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g où $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = x^4 - 2x^2$ où x en décimètre. Calculez l'aire de la surface nécessaire de papier d'affiche pour produire 1000 affiches pour cette production.

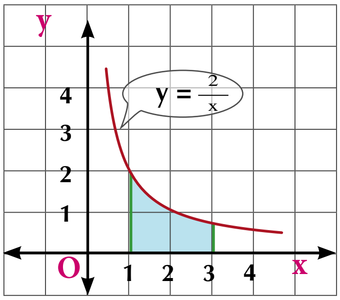
- En utilisant un programme graphisme tracez cette affiche puis trouvez une méthode simple pour calculer son aire.

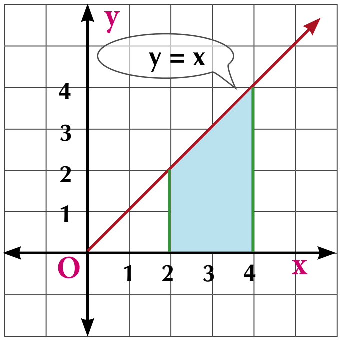
Exercice 4 - 4

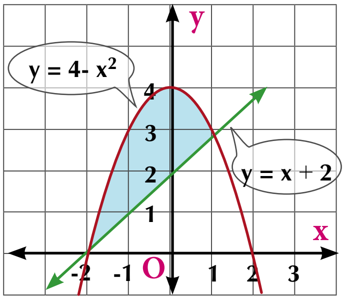
Ecrivez l'intégral finie qui exprime l'aire de la partie colorée dans ce qui suit, puis calculez sa valeur.

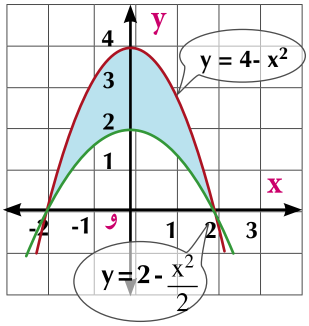
1


2


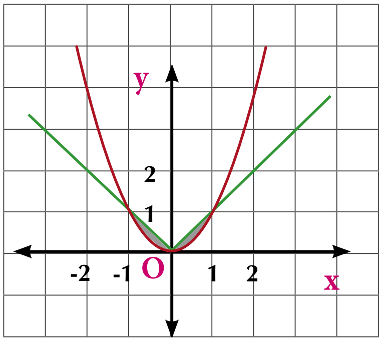
3


4


5


6


Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :



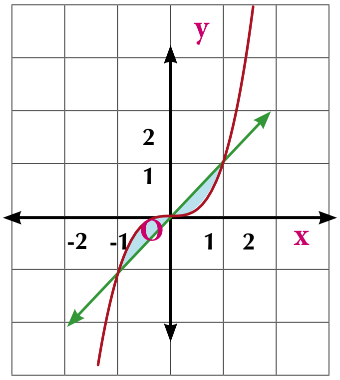
7 L'aire de la surface limitée par les courbes des fonctions $y = x^2$ et $y = |x|$ est égale à :

a $2\int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx$

b $\int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx$

c $2\int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx$

d $\int_{-1}^{1} (x - x^2)\, dx$



8 L'aire de la surface limitée par la courbe de la fonction $y = x^3$ et $y = x$, est égale à :

a $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)\, dx$

b $2\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx$

c $\int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$

d $2\int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$

9 L'aire de la surface limitée par les droites $y = x$, $x = 2$ et $y = 0$: est égale à :

a $\frac{1}{2}$

b 1

c 2

d 4

(10) L'aire de la surface limitée par la courbe de la fonction $y = x^3$ et les droites $y = 0$ et $x = 2$ est égale à

a 8 b 4 c 2 d 1

Dans ce qui suit, calculez l'aire de la région comprise entre :

(11) La courbe $y = 5 - x^2$, l'axe des abscisses et les droites $x = -2$ et $x = 1$

(12) Les droites : $x + 2y = 9$, $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$

(13) La courbe $y = \sqrt{x+4}$ et les droites $x = 0$, $x = 5$ et $y = 0$

(14) La courbe $y = 3 - 2x - x^2$ et l'axe des abscisses

(15) La courbe $y = \frac{4}{x^2}$ et les droites $x = 1$, $x = 4$ et $y = 0$

(16) La courbe de la fonction f: $f(x) = (3 - x)(x - 1)^2$ et les deux axes où $f(x) \geqslant 0$

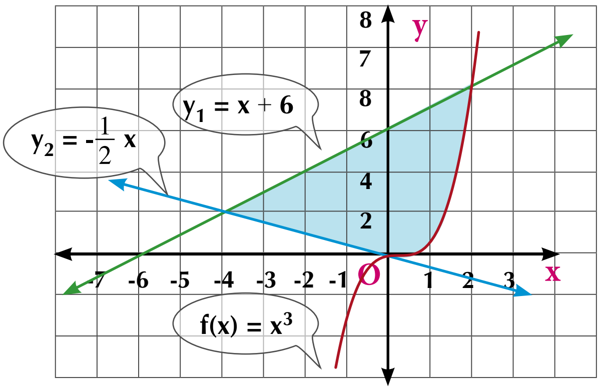
(17) La courbe de la fonction f: $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ et les droites $x = 4$ et $y = 0$ où $f(x) \geqslant 0$

(18) Les courbes des fonctions f et g où $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 2x + 4$

(19) En utilisant l'intégral finie, démontrez que l'aire du triangle dont la longueur de sa base = a et sa hauteur = b est égale à $\frac{1}{2}$ ab

(20) Pensé critique : Dans la figure ci-contre, trouvez l'aire de la surface limitée par la courbe de la fonction f et les droites y_1 et y_2 où :

$f(x) = x^3$, $y_1 = x + 6$, $y_2 = -\frac{1}{2}x$



5 - 4

Volumes de solides de révolution

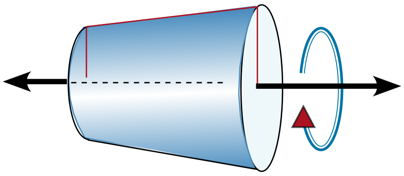
Reflichissez et discutez

Avez-vous vu Alfoackher maker, qui transforme le terreau en Antiquités et ustensiles de cuisine en mélangeant l'argile Aswani avec de l'eau et le coupé et placé autour de l'axe spins, et le façonner avec ses doigts et ses Aides pour produire des corps avec des formes attrayantes. Étant donné que ces objets sont appelés?

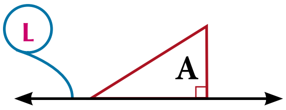
- On Conçu les bouteilles en plastique pour remplir de l'eau gazeuse, les jus et de l'huile en différentes volumes et capacités. Comment vous pouvez calculer ses volumes et ses capacités quand on les conçut?

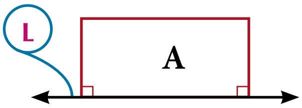
Solide de révolution

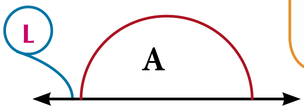
Le Solide de révolution engendré par la rotation d'une région plane une tour complète autour d'une droite fixe du plan qui est appelée «axe de révolution».

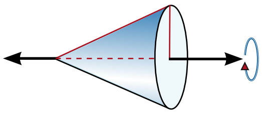


Les figures suivantes montrent quelques exemples des solides de révolutions obtenu par l'aire A quand il fait une tour complète autour la droite **L**

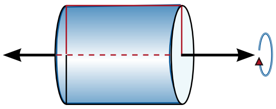




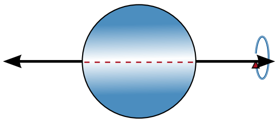




Cône droit



Cylindre droit



Sphère

Allez apprendre

- Connaître le volume comme intégral finie
- Utilisation l'intégral finie pour calculer les volumes.
- Calculer le volume de révolution engendré par la rotation d'une région comprise entre deux courbes

Vocabulaire de bas

- Axe de révolution
- Solide de révolution

Aide pédagogique

- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme.

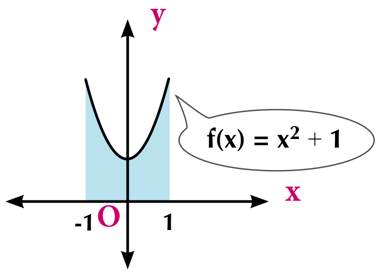
Volume de révolution

1) Volume de Solide engendré par la rotation d'une région plane autour d'un axe .

Définition

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a , b] , $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a , b]$, alors le volume de solide engendré par la rotation d'une région limité par la courbe $y = f(x)$ et l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$, une tour complète autour de l'axe des abscisses est : $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$

Exemple Rotation autour de l'axe des abscisses



(1) Calculez le volume de solide engendré par la rotation d'une région limité par la courbe f et l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 1$, une tour complète autour de l'axe des abscisses, tel que $f(x) = x^2 + 1$

Solution :

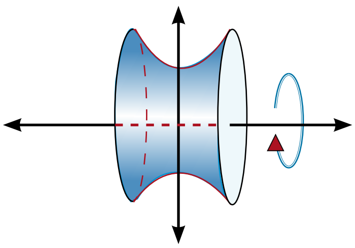
La fonction f est un polynôme continue sur l'intervalle [-1, 1], $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, b]$

Soit le volume obtenu de la rotation = V

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{56}{15} \pi \text{ unité cube}$$



Essayez de résoudre

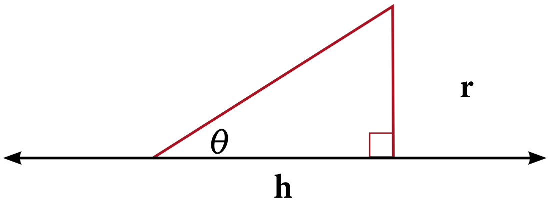
(1) Calculez le volume de solide engendré par la rotation d'une région limitée par la courbe f et l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$, une tour complète autour de l'axe des abscisses, tel que $f(x) = x$. Quel est le nom du solide engendré ? Expliquez comment vérifier de votre réponse.

Exemple applications des volumes

(2) En utilisant l'intégral, démontrez que le volume du cône droit est égale à $\frac{\pi}{3} r^2 h$ où r la longueur de rayon de la base, h sa hauteur.

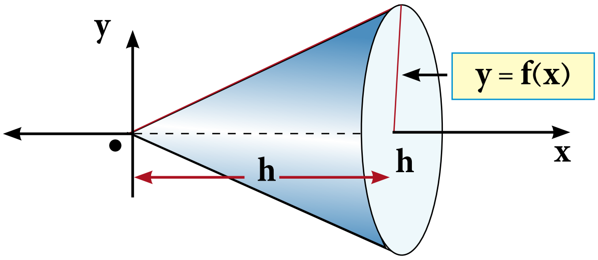
Solution :

Le cône droit est engendré par la rotation d'un triangle rectangle de tel sorte que l'un de deux côtés de l'angle droit est situé sur l'axe des abscisses autour de l'axe des abscisses une tour complète.



On trouve la relation entre x et y = f(x)

$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$ (1) $\therefore y = x \text{ tg } \theta = f(x)$



$\because V = \pi \int_a^b [f(x)^2] \, dx = \pi \int_0^4 x^2 \text{ tg}^2 \theta \, dx$

$= [\frac{\pi}{3} x^3 \text{ tg}^2 \theta]_0^h = \frac{\pi}{3} h^3 \text{ tg}^2 \theta$ (2)

de (1) $\text{tg } \theta = \frac{y}{x} = \frac{r}{h}$

$\therefore \tan^2 \theta = \frac{r^2}{h^2}$

Substituant en (2) $\therefore V = \frac{\pi}{3} \frac{r^2}{h^2} \times h^3 = \frac{\pi}{3} r^2 h$

Essayez de résoudre

2 En utilisant l'intégral , démontrez que:

a Volume de la sphere = $\frac{4}{3} \pi r^3$
(r est la longueur du rayon de la sphére)

b volume d'un cylindre circulaire droit = $\pi r^2 h$
(r est la longueur du rayon de sa basse et h sa hauteur)

Rappelle

L'équation du cercle du ceutre (0,0) et de rayon (r) is:
$x^2 + y^2 = r^2$

Exemple

Rotation autour de l'axe des abscisses

3 Trouvez le volume du solide engendré par la rotution de la région limitée par la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'axe des abscisses, où a et b sont deux constants une tour compléte autour de l'axe des abscisses.

Solution :

$\because$ La rotation autour de l'axe des abscisses $\therefore y^2 = b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2})$

Bornes de l'intégral :

$y = 0$ $\therefore x^2 = a^2$ **c-a-d** $x = - a , x = a$

$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) \, dx = 2 \pi b^2 \int_0^a (1 - \frac{x^2}{a^2}) \, dx$ **(pourquoi ?)**

$= 2 \pi b^2 [x - \frac{x3}{3a^2}]_0^a = 2 \pi b^2 [a - \frac{1}{3} a]$

$= \frac{4}{3} \pi b^2 a$ unité cubique .

Essayez de résoudre

3 Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe d'équation $y = 2x - x^2$ et l'axe des abscisses, une tour compléte autour de l'axe des abscisses.

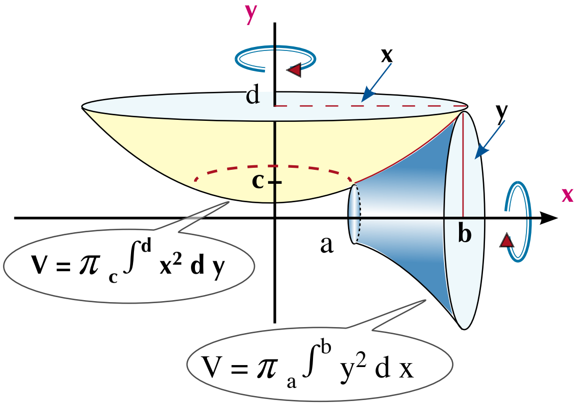
Remarque importante

Si la rotation autour de l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$ **alors :**

$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$

Si la rotation autour de l'axe des ordonnées et les droites $y = c$, $y = d$ **alors :**

$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$



Exemple Rotation autour de l'axe des ordonnées

(4) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = x^2 + 1$ et l'axe des ordonnées, et la droite $y = 5$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées.

Solution :

$\because y = x^2 + 1$ et la rotation autour de l'axe des ordonnées

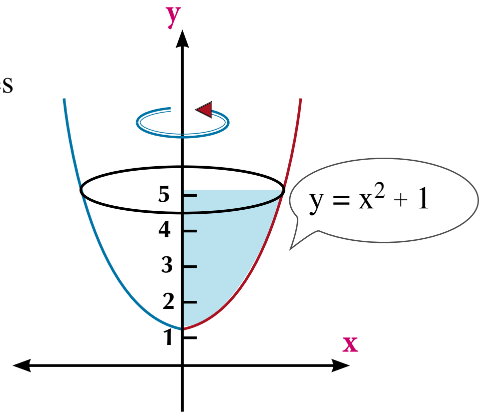
$\therefore x^2 = y - 1$

Quand $x = 0$, $y = 1$

Bornes de l'intégral $y = 1$, $y = 5$

$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy = \pi \int_1^5 (y - 1) \, dy$

$= [\frac{\pi}{2} (y - 1)^2]_1^5 = \frac{\pi}{2}(16 - 0) = 8\pi$ Unité cubique



Essayez de résoudre

(4) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe d'équation $y = x^2$ et l'axe des ordonnées, et les droite $y = 0$ et $y = 6$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées.

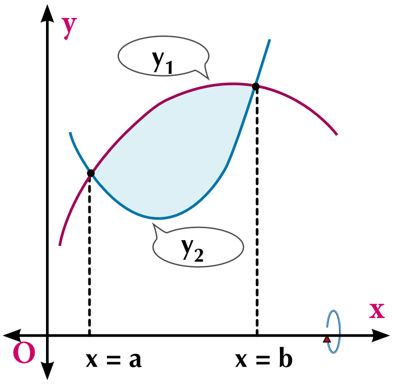
2) Volume du solide engendré par la rotation d'une région limitée par deux courbes

Définition

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$, $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors le volume V du solide engendré par la rotation de la région limitée par deux courbes et les droites $x = a$, $x = b$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est :

$$V = \pi \int_a^b [[f(x)]^2 - [g(x)]^2] \, dx$$

Remarquez que



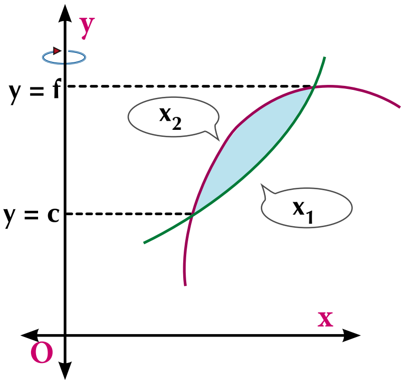
1- Si la région limitée par les deux courbes $y_1 = f(x)$,

$y_2 = g(x)$ est tournée où $y_1 \geqslant y_2$ pour tout $x \in [a, b]$

c'est la région colorée dans la figure ci-contre au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses, alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont les bornes de l'intégral a et b où $a < b$ Le volume V du solide engendré est :

$$V = \pi \int_a^b [(y^2_1 - y^2_2)\, d x$$

c.-à-d. : $V = \pi \int_a^b y^2_1\, d x - \pi \int_a^b y^2_2\, d x$



2- Si la région limitée par les deux courbes

$x_1 = f(y)$ et $x_2 = g(y)$ est tournée où $x_1 \geqslant x_2$

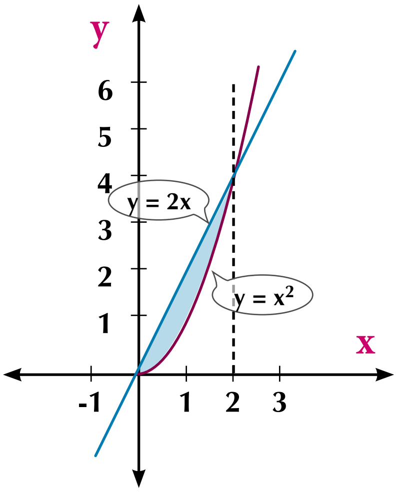
pour tout $y \in [c , d]$ c'est la région colorée dans la figure ci-contre au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées, alors les ordonnées des points d'intersection des deux corbes sont les bornes de l'intégral c et d où $c < d$ Le volume V du solide engendré est $V = \pi \int_c^d [(x^2_1 - x^2_2)\, d y$

c-à-d. : $V = \pi \int_c^d x^2_1\, d y - \pi \int_c^d x^2_2\, d y$

Exemple Rotation d'une région limitée par deux courbes autour de l'axe des abscisses

(5) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = x^2$ et la droite $y=2x$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses .

Solution :



Soient $y_1 = x^2$, $y_2 = 2x$

Pour trouver les points d'intersections on pose $y_1 = y_2$

$\therefore\ x = 0$ ou $x = 2$

$\because\ y_2 \geqslant y_1$ pour tout $x \in [0 , 2]$ comme indique la figure

$$\therefore\ V = \pi \int_a^b (y_2^{\,2} - y_1^{\,2})\, d x$$

$$= \pi \int_0^2 (2x)^2 - (x^2)^2\, d x$$

$$\therefore\ V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)\, d x$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5\right]_0^2$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \times \frac{2}{15} = \frac{64\pi}{15}$$ unité cubique

Essayez de résoudre

5) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les deux courbes $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses .

Exemple

Rotation d'une région limitée par deux courbes autour de l'axe des ordonnées

6) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les deux courbes $y = 4 - x^2$ et la droite $2x + y = 4$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées.

Solution :

$\because$ La rotation autour de l'axe des ordonnées

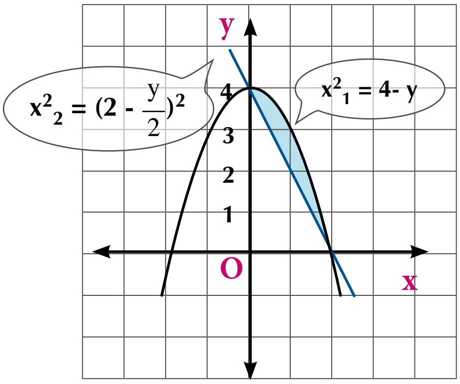
$\therefore x^2_1 = 4 - y$, $x^2_2 = (2 - \frac{y}{2})^2$

Aux points d'intersections $x_1 = x_2$

$4 - y = (2 - \frac{y}{2})^2$ $\qquad \therefore \frac{y^2}{4} - y = 0$

$y(y - 4) = 0$ $\qquad y = 0 , y = 4$

et $x^2_1 > x^2_2$ $\qquad$ for each $x \in [0, 4]$



$$V = \pi \int_c^d (x^2_1 - x_2^2)\, dy = \pi \int_0^4 [(4 - y) - (2 + \frac{y}{2})^2]\, dy$$

$$= \pi \int_0^4 (y - \frac{y^2}{4})\, dy = \pi [\frac{1}{2} y^2 - \frac{y^3}{12}]_0^4$$

$$= \pi [8 - \frac{16}{3}] = \frac{8}{3} \pi \text{ unité cubique}$$

Essayez de résoudre

6) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les deux courbes $2y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées.

Exercices 4 - 5

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 1$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est égale à.

a) $-\pi$ $\qquad$ b) 0 $\qquad$ c) π $\qquad$ d) 2π

2) Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = \frac{1}{x}$ et les droites ; $y = 1$ et $y = 2$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonné est égale à.

a) $\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ b) $\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ c) π $\qquad$ d) 2π

3 Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = x^2$ et la droite $y = 1$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonné est égale à :

a π b $\frac{1}{2}\pi$ c $\frac{1}{4}\pi$ d 2π

4 $\pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, d\,x$ est le volume de

a une sphère de rayon 4 unités b un cône circulaire droit de 4 unités de hauteur

c une sphère de rayon 2 unités d un cylindre circulaire droit de 4 unités de hauteur

Calculez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les courbes et les droites données au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses dans ce qui suit :

5 $y = x$, $x = 3$, $y = 0$

6 $y = 3 - x$, $x = 0$, $y = 0$

7 $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

8 $y = |x|$, $x = -2$, $x = 4$, $y = 0$

Calculez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les courbes et les droites données au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées dans ce qui suit :

9 $y = x$, $y = 1$, $x = 0$

10 $y = x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$

11 $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$

12 $y = x^3$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$

13 $x + 2y = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$

Répondez à ce qui suit :

14 Calculez Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y^2 = 4 - x$ et la droite $x = 0$ au cour d'une révolution autour de .

Premiérement: l'axe des abscisses **Deuxémement**: l'axe des ordonnées

15 Calculez Le volume du solide engendré par la région limitée par la rotation de la courbes $y = \frac{4}{x}$ et la droite $x + y = 5$ une toure compléte autour de l'axe des abscisses.

16 pensé critique : Si les points A (- 2 ; 0) ; B (1 ; 5) et C (4 ; 0) sont les sommets d'un triangle ABC. Calculez Le volume du solide engendré par la rotation du triangle ABC une toure compléte autour de l'axe des abscisses.

Résumé de l'unité

Différentiation d'une fonction : soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert qui contient x ; y = f(x) alors :

$dy = f'(x)\,dx$ où dy différentiation de y et dx différentiation de x.

Intégral par substitution : L'une des méthodes pour trouver l'intégral de produit de deux fonctions dans lequel en transforme l'intégral en Intégral usuelle ; si z = g (x) est une fonction dérivable, alors :

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz$$

Intégral par partition : L'une des méthodes pour trouver l'intégral de produit de deux fonctions l'une n'est pas la dérivée de l'autre, Si y et z sont deux fonctions en x et dérivables,sur un intervalle I : **alors**: $\int y\,dz = yz - \int z\,dy$

Tableau des primitives de quelques fonctions usuelles	
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ où $n \in R - \{1\}$	$\int \text{cosec}\,x\,\text{tg}\,x\,dx = \text{cosec}\,x + c$ $x \neq \frac{2^n+1}{2}\pi$, $n \in Y$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x\,dx = -\text{cosec}\,x + c$ $x \neq n\pi$, $n \in Y$
$\int \cos x\,dx = -\sin x + c$	$\int e^x\,dx = e^x + c$
$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\,x + c$ $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi$, $n \in Z$	$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$ $a > 0$, $a \neq 1$
$\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\text{cotg}\,x + c$ $x \neq n\pi$, $n \in Z$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln \mid x \mid + c$ $x \neq$ zero

Intégral finie :

Théorème:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a;b] et F une primitive quelconque de f sur [a;b] alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Propriétés de l'intégral finie :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a;b] , c ∈]a ;b[, alors :

1. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ pour tout $c \in [a\,;\,b]$

(4) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ (f est une fonction impaire)

(5) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (f est une fonction paire)

➲ ***Solide de révolution:***

Le Solide de révolution engendré par la rotation d'une région plane une tour complète autour d'une droite qui est appelée axe de révolution.

Exercices généraux

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si $f(x) = \int (3x^2 - 5)\,dx$ et $f(2) = 3$, alors $f(-2)$

   a) -6 b) -3 c) 7 d) 12

2. Si $\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2}$ quand $x = 1$, $x = e$, alors y est égale à :

   a) $e^2 - e$ b) $\frac{e^2 - 1}{2}$ c) $\frac{e^2 + 1}{4}$ d) $\frac{e^2}{2} + 1$

3. $\int tg^2 x\,dx$ est égale à

   a) $tg\,x - x + c$ b) $tg\,x + x + c$ c) $sec^4 x + c$ d) $\frac{1}{3} tag^3 x + c$

4. Si $\int_2^5 f(x)\,dx = 4$, alors $\int_2^5 [3f(x) - 1]\,dx$ est égale à

   a) 9 b) 11 c) 12 d) -8

5. Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = x^2$ et l'axe des abscisses et les droites $x = -2$ et $x = 2$ une toure compléte autour de l'axe des abscisses est égale à

   a) $\frac{16\pi}{5}$ b) $\frac{32\pi}{5}$ c) $\frac{64\pi}{5}$ d) 4π

Trouvez la différentielle de :

6. $y = 3x^2 - 1$
7. $y = \sqrt{(2x + 3)^5}$
8. $y = (x + \frac{1}{x})^3$
9. $y = e^{-5x}$
10. $y = e^{x^2 + 3x}$
11. $y = e^{\cos 2x}$
12. $z = \ln(x^2 + 1)$
13. $z = (\ln \frac{10}{x})^2$
14. $z = \ln\,cotg\,(3x - 1)$

Exprimez ce qui suit par un seul intégral

15. $\int_0^5 x^2\,dx + \int_{-2}^0 x^2\,dx$
16. $\int_{-4}^{-1} \sqrt{x + 6}\,dx - \int_4^{-1} \sqrt{x + 6}\,dx$
17. $\int_2^6 k\,dx + \int_3^2 k\,dx$
18. $\int_0^4 2x^2\,dx + \int_4^5 x^2\,dx$

Répondez à ce qui suit :

19. Si $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$, $\int_2^4 g(x)\,dx = -3$, trouvez :

   a) $\int_2^4 3f(x)\,dx$ b) $\int_4^2 2\,g(x)\,dx$

   c) $\int_2^4 [3f(x) - 2\,g(x)]\,dx$ d) $\int_2^4 [3g(x) + 4x]\,dx$

20. Si $f''(x) = 6x - 4$, $f'(1) = 2$, $f(0) = -4$, trouvez $f(x)$

Trouvez les intégrales finie suivants :

21. $\int_2^4 (x^2 + \frac{1}{x^2})\,dx$
22. $\int_1^3 \frac{6 - x^4}{2x^2}\,dx$
23. $\int_1^4 \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}\,dx$

24 $\int_{-1}^{1} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}\, dx$ **25** $\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$ **26** $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

En utilisant la substitution convenable calculez les intégrals suivants :

27 $\int x\,(x-5)^3\, dx$ **28** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^3}$ **29** $\int x \sec^2 (x^2+2)\, dx$

30 $\int \sec^4 x \tan x\, dx$ **31** $\int x\, e^{x^2+3}\, dx$ **32** $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2}\, dx$

En utilisant la partition convenable calculez les intégrals suivants :

33 $\int 3x\sqrt{2x+3}\, dx$ **34** $\int x^4 \ln x\, dx$ **35** $\int_{1}^{2} 4x\, e^{2x}\, dx$

Répondez à ce qui suit :

36 Trouvez l'aire de la surface limitée par les courbes $y = 7 + 2x - x^2$, $y = (x-1)^2$

37 Trouvez l'aire de la surface limitée par les courbes $y = 9 - x^2$, $y = x^2 + 1$ et les droites $x = 0$, $x = 3$

38 Trouvez l'aire de la surface limitée par les courbes $y = 9 - x^2$, $y = x^2 + 1$ et l'axe des abscisses et les droites $x = 0$, $x = 3$

39 Calculez Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = \frac{1}{x-1}$ et les droites $x = 2$ et $x = 4$ au cour d'une révolution autour de .

a l'axe des abscisses **b** l'axe des ordonné

40 Calculez Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbes $y = \sqrt{2x}$, et l'axe des abscisses et la tangente à la courbe au point (2 ; 2) de la courbe au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses.

Pour plus d'activités et des exercices : visite le site électronique www.sec3mathematics.com.eg

Epreuve cumulative

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) $\int (4 - \text{cosec } x \text{ cotg } x)\, dx$ est égale à :

a) $4x - \text{cosec } x + c$ b) $4x + \text{cosec } x + c$

c) $4x - \text{cotg } x + c$ d) $4x + \text{cotg } x + c$

2) $\int \frac{e^x}{e^x - 3}\, dx$ est égale à :

a) $-\frac{1}{2}(e^x - 3) + c$ b) $-\ln|e^x - 3| + c$

c) $\ln|e^x - 3| + c$ d) $\frac{1}{2}\ln|e^x - 3| + c$

3) $\int_0^2 (2 - |x|)\, dx$ est égale à :

a) 4 b) 2 c) 1 d) zero

4) L'aire de la surface limitée par la courbe $y = \sqrt{4 - x^2}$ et l'axe des abscisses = ... unité carré .

a) 2 b) 4 c) 2π d) 4π

5) Si $\int_1^3 f(x)\, dx = 5$, $\int_3^1 g(x) = 7$, alors $\int_1^3 (4 f(x) + g(x) + 3)\, dx$ est égale à :

a) -12 b) -7 c) 12 d) 19

6) Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = \frac{2}{x}$ et les droites $x = 1$ et $x = 4$ et $y = 0$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est égale à en unité cubique : ....

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

Répondez à ce qui suit :

7) 7) Calculez les intégrals suivants :

a) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x}}\, dx$ b) $\int x^2 \sqrt{x - 3}\, dx$

8) Si $f(x) = \int (x + 1)(2x^2 + 4x - 1)\, dx$, $f(-2) = 1$, **trouvez f(3)**

9) 9) Calculez les intégrals suivants :

a) $\int \text{tg } x \sec^3 x\, dx$ b) $\int \sqrt{1 + \sin x}\, \cos x\, dx$

10 Calculez les intégrals suivants :

a $\int x^2 \ln x^2 \, d\,x$ **b** $\int x\, e^{2x^2 - 1} \, d\,x$

11 Trouvez la valeur de ce qui suit :

a $\int_{-3}^{3} (2x^5 - 3 \sin \frac{\pi}{6} x) \, d\,x$ **b** $\int_{-2}^{2} x^2 (3 - 2\,|x|) \, d\,x$

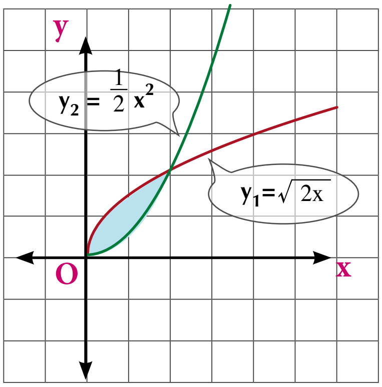
12 Si $\int_{2}^{5} f(x)\, d\,x = 8$, $\int_{5}^{2} g(x)\, d\,x = 3$, trouvez la valeur de $\int_{2}^{5} (f(x) + 2g(x) - 5)\, d\,x$

13 Trouvez en unités carrés l'aire de la surface limitée par la courbe $f(x) = (x - 2)^3$ et l'axe des abscisses dans l'intervalle [2 ;4]

14 La figure ci-contre montre la région limitée par les courbes $y_1 = \sqrt{2x}$ et $y_2 = \frac{1}{2} x^2$, trouvez :

a l'aire de la surface limitée par les deux courbes y_1 et y_2

b Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les deux courbes y_1 et y_2 au toure d'une révolution autour de l'axe des abscisses.



Si vous ne pouvez pas réponder aux questions vous pouvez voir ce tableau :

N° de question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Voire Leçon	2	1	3	4	3	5	1	activités	2	1	3	3	4	5

Épreuve 1

Premièrement : Répondez à la question suivant

1 Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées

1- Laquelle des fonctions suivantes vérifie la relation $\frac{d^3y}{dx^3} = y$?

- a) $y = \frac{1}{12}(x+1)^4$
- b) $y = \sin x$
- c) $y = e^x$
- d) $y = \frac{x}{x-1}$

2- Si la longueur de rayon d'un cercle augment d'un taux de $\frac{1}{\pi}$ cm/s, alors son périmètre augment d'un taux de .... cm/s

- a) $\frac{2}{\pi}$
- b) 2
- c) π
- d) 2π

3- La courbe de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ est convexe vers le haut quand $x \in$

- a) $]-\infty, 0[$
- b) $]-\infty, 1[$
- c) $]1, 3[$
- d) $]1, \infty[$

4- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$ est égale à

- a) 4
- b) 2
- c) zero
- d) π

5- Si f est une fonction continue sur R, $\int_3^5 2 f(x)\, dx = 8$, $\int_3^4 3 f(x)\, dx = 9$, alors $\int_4^5 5 f(x)\, dx =$

- a) zero
- b) 1
- c) 3
- d) 5

6- L'aire de la région limitée par la courbe $y = \sqrt{16 - x^2}$ et l'axe des abscisses en unités carrés est égale à :

- a) 16π
- b) 12π
- c) 8π
- d) 4π

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes

2 a) Trouvez : $\int \sin x \cos^3 x\, dx$

b) Si $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$, trouvez $\frac{dy}{dx}$ en $x = 0$

3 a) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $x^2 - 3xy - y^2 + 3 = 0$ au point $(-1, 4)$

b) Les côtés de l'angle choit d'un triangle rectangle à un moment donné étaient 6 cm et 30 cm, si la longueur du premier côté augmente d'un taux de $\frac{1}{3}$ cm/min et la longueur du deuxième côté diminue d'un taux de 1 cm/min. Trouvez :

1- Le taux d'augmentation de l'aire du triangle après 3 minutes

2- Le temps après lequel l'augmentation de l'aire s'arrête .

4 a) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x) = x + 2\sin x,\ 0 < x < 2\pi$

b) Trouvez l'aire maximale d'un rectangle tracé de tel sorte que deux sommets consécutifs soient situés sur la courbe $y = x^2 - 12$ et les deux autre sommets sur la courbe $y = 12 - x^2$.

(5) (a) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les deux courbes $y = \frac{4}{x}$ et $y = (x - 3)^2$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses

(b) Tracez l'allure générale de la courbe representative de la fonction f qui vérifie les propriétés suivantes :

$f(1) = f(5) = 0$, $f(2) = -3$ — $f''(x) < 0$ pour tout $x \neq 2$

$f'(x) < 0$ pour tout $x < 2$, — $f'(x) > 0$ pour tout $x > 2$

Épreuve 2

Premièrement : Répondez à la question suivante :

(1) **Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :**

1- L'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = e^{2x+1}$ au point $(\frac{-1}{2}, 1)$ est:

(a) $2y = x + 1$ (b) $y = 2x + 2$ (c) $y = 2x - 3$ (d) $2y = 3x + 1$

2- Si $y = 4n^3 + 4$, $z = 3n^2 - 2$, alors le taux de variation de z par rapport à y est égale à :

(a) $2n$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2n}$ (d) 4

3- La valeur maximale de l'expression $8x - x^2$ où $x \in R$ est

(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 64

4- Si la pente de la tangente en un point de la courbe de la fonction f est égale à $\frac{1}{x-2}$; la courbe passe par le point $(3, 0)$, alors $f(e^2 + 2)$ est égale à

(a) 2 (b) 3 (c) ln 2 (d) ln 3

5- Si f est une fonction continue sur R , $\int_1^2 f(x)\,dx = 9$ $\int_6^2 f(x)\,dx = -7$, alors $\int_1^6 f(x)\,dx =$:

(a) 2 (b) 8 (c) 16 (d) -63

6- Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = \sqrt{x+1}$ et les droites $y = 0$, $x = -1$ et $x = 1$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est égale à

(a) π (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) 2π (d) $\frac{5\pi}{2}$

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

(2) Trouvez

(a) $\int x(2x - 1)^3\,dx$, $\int x e^{-2x}\,dx$

b Trouvez le taux de variation de $\sqrt{16+x^2}$ par rapport à $\frac{x}{x-2}$ en x = -3

3 **a** Si x cos y + y cos x = 1, trouvez $\frac{dy}{dx}$

b Trouvez les valeurs maximale et minimale absolus de la fonction f dans l'intervalle [-1 ; 1] où $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5$

4 **a** Si $f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{quand } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{quand } x \geqslant 0 \end{cases}$, trouvez :

1- les valeurs maximale et minimale relatives de la fonction f **2-** $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

b Le volume d'un cube augmente régulièrement en gardant sa forme d'un taux de 27 cm^3 / min, trouvez le taux d' augmentation de son aire totale quand la longueur de son arête est égale à 3 cm.

5 **a** Trouvez l'aire de la région limitée par les courbes $y = x^2$ et $y = 6x - x^2$ en unités carrés

b Si (2 ; -2) est un point d'inflexion de la courbe d'équation $f(x) = x^3 + a x^2 + b x$ où a et b sont des constantes, trouvez:

a) Les valeurs de a et b. puis tracez la courbe de la fonction .

Épreuve 3

Premièrement : Répondez à la question suivante :

1 **Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées**

1- L'équation de la tangente à la courbe du cercle $x^2 + y^2 = 25$ en x = 3 est

a $\frac{-4}{3}$ **b** $\frac{-3}{4}$ **c** $\frac{5}{12}$ **d** $\frac{4}{3}$

2- Si $f(x) = \frac{x}{x-2}$, alors $f'''(3) =$

a - 36 **b** - 12 **c** 6 **d** 4

3- Si $\frac{dy}{dx} = \text{cosec}^2 x$, y = 2 quand $x = \frac{\pi}{4}$, alors y =

a - (2 + cotg x) **b** - (3 + cotg x) **c** 2- cotg x **d** 3- cotg x

4- Si $\int_2^4 f(x)\,dx = 7$, $\int_4^2 g(x)\,dx = 2$, alors $\int_2^4 [2f(x) - 3g(x) - 5]\,dx$ est éqal à:

a -18 **b** -8 **c** 10 **d** 14

5- L'aire de la région limitée par les droites y = 2x -3, y = x + 1, x = 2 est égale à

a 2 **b** 3 **c** $\frac{9}{2}$ **d** 6

6- Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les courbes $y = \text{tg}\,\theta$, et $y = \text{cosec}\,\theta$ et les droites $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses en unités cubiques est égale à :

a $\frac{\pi}{6}$ **b** $\frac{\pi}{3}$ **c** $\frac{2\pi}{5}$ **d** 2π

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

(2) (a) Trouvez la dérivée de y par rapport à x tel que : $y = x^2 \ln x$

(b) Si $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$, Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas ainsi que le point d'inflexion (s'il existe) de la fonction f

(3) **Trouvez**

(a) 1- $\int x(x-5)^3 \, dx$ 2- $\int 4x e^{2x} \, dx$

(b) Trouvez les valeurs maximale et minimale absolues de la fonction f où $f(x) = x^4 - 4x^3$ dans l'intervalle $[0, 4]$

(4) (a) Si le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = x^3$; et les droites $x = 0$ et $y = 1$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est égale au volume d'un fil cyl indrique de longueur 42 unité, quelle est la longueur de rayon du fil?

(b) Un triangle isocèle de base fixe de longueur L cm, ses côtés diminuent d'un taux de 3 cm / min. Quel est le taux de diminution de son aire quand il devient un triangle équilatéral?

(5) (a) Trouvez l'aire de la région limitée par les courbes $x - y = 0$, $y = 4x - x^2$

(b) Tracez l'allune générale de la courbe de la fonction continue f qui vérifie les propriétés suivantes :

1- $f(0) = 3$ 2- $f'(2) = f'(-2) = 0$

3- $f'(x) > 0$ quand $-2 < x < 2$

4- $f''(x) < 0$ quand $x > 0$, $f''(x) > 0$ quand $x < 0$.

Épreuve 4

Premièrement : Répondez à la question suivante :

(1) **Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées**

1- Si $y = \frac{3x-5}{x-2}$, alors $x = 1$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ est égale à :

(a) -12 (b) -6 (c) 6 (d) 12

2- $\int \sec^3 x \, \text{tg} \, x \, dx$ est égale à:

(a) $\frac{1}{4} \sec^4 x + c$ (b) $\frac{1}{3} \sec^3 x + c$

(c) $\frac{1}{2} \text{tg}^2 x + c$ (d) $-\frac{1}{2} \text{tg}^2 x + c$

3- La normale au cercle $x^2 + y^2 = 12$ d'un point sur le cercle passe par le point

(a) (2 ; 3) (b) (1; 1) (c) (0; 0) (d) (-2; -2)

4- La courbe de la fonction $f(x) = (x-2)e^x$ est convexe vers le bas dans l'intervalle :

ⓐ $]-\infty\,;\infty[$ ⓑ $]-1\,;2\,[$ ⓒ $]0\,;2\,[$ ⓓ $]-\,;\infty\,[$

5- $\int_{-1}^{3} 3x\,|x-4|\,dx$ est égale à

ⓐ -27 ⓑ -20 ⓒ 20 ⓓ 27

6- Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $1 \leqslant y \leqslant 4$ et l'axe des ordonnées au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées en unités cubiques est égale à :

ⓐ $\frac{2}{3}\pi$ ⓑ $3\sqrt{2}\,\pi$ ⓒ $2\pi \log_e{}^2$ ⓓ $\frac{2}{3}\pi\,\text{Log}3$

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

② ⓐ Trouvez : $\int (3x^2 - 4\,e^2x)\,dx$, $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}\,dx$

ⓑ Si $\sin y + \cos 2x = 0$. Démontrez que : $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 \,\text{tg}\, y = 4\cos 2x \sec y$.

③ ⓐ Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 7$, $\int_4^1 g(x)\,dx = 3$, calculez la valeur de $\int_1^4 [f(x) + 2\,g(x) - 4]\,dx$

ⓑ Si la courbe de la fonction f où $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ admet une valeur maximale relative au point (2 ;4) et un point d'inflexion au point (1 ; 2). Trouvez l'équation de la courbe.

④ ⓐ Trouvez l'aire de la région limitée par la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ et les droites $x = 0$, $y = 0$

ⓑ Tracer la courbe représentative de la fonction continue f qui vérifie les propriétés suivantes :

$f(4) = 2\,f(3) = 4$, $f(2) = 0$

$f'(x) < 0$ quand $x > 4$ ou $x < 2$,

$f''(x) < 0$ quand $x > 3$, $f''(x) > 0$ quand $x < 3$

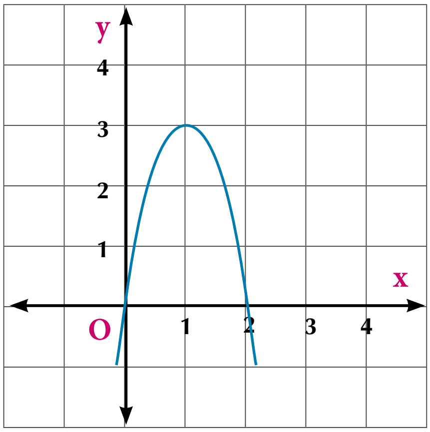
⑤ ⓐ Démontrez que le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les courbes $y = \frac{4}{x}$ et $y = 5 - x$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses est égal à 9π unités cubiques

ⓑ Si A est l'aire de la partie comprise entre deux cercles concentriques de rayons R_1 et R_2 tel que $R_1 > R_2$, Trouvez le taux de variation de l'aire A par rapport au temps quand $R_2 = 10$ cm et $R_1 = 6$ cm, sachant que R_1 augmente d'un taux de 0, 3 cm / s et R_2 diminue d'un taux de 0, 2 cm / s.

Épreuve 5

Premièrement : Répondez à la question suivant :

1. La figure ci-contre montre la courbe de $f'(x)$ pour la fonction f tel que $f(x) = a x^3 + b x^2$, où a et b sont deux constants



Complétez:

a) la fonction f est décroissante pour tout $x \in$ ....

b) la courbe de f admet un point critique en $x \in$ ....

c) la courbe de f est convexe vers le haut sur l'intervalle ....

d) il existe une valeur minimale relative pour la fonction f en $x =$ ....

e) $f(1) =$ ....

f) l'aire de la région limité par la courbe de la fonction f , et les droites $x = 2$; $y = 0$, en unités carrées: ....

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

2. a) Trouvez :

1 - $\int \csc^2 \dfrac{x+5}{2} \, d\,x$ 2 - $\int \dfrac{5x}{3x^2-1} \, d\,x$

b) Si $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

1- Déterminez les intervalles de croissance et décroissance de f

2- Déterminez les valeurs minimales et maximales absolues sur l'intervalle $[0 ; 2]$

3. a) Si $f(x) = 4 + \cot x - \sec^2 x$, trouvez l'équation de la normale à la courbe de la fonction f au point de la courbe d'abscisses égale à $\dfrac{\pi}{4}$

b) Un récipient vide de 10 mètres cube de capacité, on verse l'eau dans le récipient d'un taux de $(2t+3)\ m^3$ / min où t le temps en minutes, trouvez le temps nécessaire pour remplir le récipient.

4. a) **Trouvez :** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$

b) On veut dessiner une affiche à la forme triangulaire contenant 800 cm^2 de l'article imprimée de telle sorte que la largeur de chacun des marginaux supérieure et inférieure est 10 cm et chacun des marginaux à côtés est 5 cm. Quelle sont les dimensions qui rendrent son aire minimale?

5. a) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la courbe $y = 4 - x^2$; et les deux parties positives de deux axes des coordonnées au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses .

b) Si $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + 4$ où a et b sont deux constants, trouvez a et b, si la fonction admet une valeur minimale relative en $x = 2$ et un point d'inflexion en $x = 1$. Puis tracez la courbe de la fonction

Épreuve 6

Premièrement : Répondez à la question suivante :

1 **Dans chacune des phrases suivantes choisissez la lettre (A) si la phrase est vraie et la lettre (B) si la phrase est fausse.**

1 - La valeur maximale relative de la fonction est plus grand que sa valeur minimale relative (A) (B)

2 - Le taux de variation de $\sqrt{n^2+3}$ par rapport à $\frac{n}{n+1}$ est : $\frac{n\,(n+1)^2}{\sqrt{n^2+3}}$ (A) (B)

3 - Si $\sqrt{y} - \sqrt{x} = 2$, alors : $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-1}{x\sqrt{x}}$ (A) (B)

4 - $\int \frac{x-4}{(x-2)^6}\, d x = \frac{7(x-4)^2}{2(x-2)^7} + c$ (A) (B)

5 - Si $y = x \ln x - x$, alors: $\frac{d y}{d x} = \ln x$ (A) (B)

6 - Si (a; f(a)) est un point d'inflexion d'une fonction continue f, alors :
$f''(a) = 0$ (A) (B)

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

2 **Trouvez :**

a $\int \frac{7x^3}{2-5x^4}\, d x$, $\int (3e^{-5x} + \frac{\pi}{x})\, d x$

b Si $y = a\, e^{x^2+1}$ démontrez que : $\frac{d^3 y}{d x^3} = 4xy(3+2x^2)$

3 **a** Trouvez : $\int \cot g\, x \,\mathrm{cosec}^3 x\, d x$

b Si D est la distance du point (1 ;0) au point (x ; y) appartenant à la courbe $y = \sqrt{x}$, trouvez les coordonnées du point (x ; y) pour que D soit minimale .

4 **a** Trouvez les valeurs maximales et minimale absolus de la fonction f où f(x) = x (x – 4) dans l'intervalle [-1 ;3]

b Si la pente de la tangente en un point de la courbe y = f(x) est égale à $6x^2 + bx$ et f(0) = 5 , f(2) = -3. Trouvez la valeur de b, Puis tracez la courbe de la fonction f .

5 **a** Trouvez le taux de variation de $\ln(9 + x^3)$ par rapport à $x^2 + 3$ en x = 1

b Si A (0, 3) , B (1 , 4) , C (2, 0) , Trouvez en utilisant l'intégral :

(i) **L'aire du triangle ABC** .

(ii) Trouvez le volume du solide engendré par la rotation du triangle $\triangle ABC$ au cour d'une révolution autour de l'axe des ordonnées .

Épreuve 7

Premièrement : Répondez à la question suivant :

1 **Dans chacune des phrases suivantes, choisissez la lettre (a) si la phrase est vraie et la lettre (b) si la phrase est fausse.**

1 - Si $y^2 = 3x^2 - 7$, alors: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x}$ (a) (b)

2 - Le point (0 ;1) est un point d'inflexion de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$: (0, 1) (a) (b)

3 - $\frac{d}{dx}$ [cotg (cos 3x)] = 3 sin 3 x cosec^2 (cos 3 x) (a) (b)

4 - $\int (1 - \cos x)^4 \sin x \, dx = -\frac{1}{5} (1 + \cos x)^5 + c$ (a) (b)

5 - $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{5}{x})^x = e^5$ (a) (b)

6 - $\int (\frac{2e}{x} + \frac{x}{e}) \, dx = 2e \ln |x| - \frac{x^2}{e} + c$ (a) (b)

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

2 **Trouvez :**

a $\int x \sin x \, dx$ et $\int_{-1}^{1} \sqrt{x^4 + x^2} \, dx$

b Trouvez l'équation de la tangente à la courbe $y = \ln (2 - \sqrt{2} \cos x)$ au point de la courbe d'abscisses égale à $\frac{\pi}{4}$.

3 a Déterminez les intervalles de convexité vers le haut et vers le bas ainsi que le point d'inflexion s'il exisite de la courbe de la fonction $f(x) = (x - 1)^4 + 3$

b Un parallélépipède rectangle sa base à la forme d'un carré, si le côté de la base augment d'un taux de 0,4 cm / s et la hauteur déminue d'un taux de 0,5 cm / s. Trouvez le taux de variation du volume quand la longueur du côté de la base égale à 6 cm et la hauteur égale à 5 cm.

4 a Si $f(x) = \int_0^3 x \sqrt{x + 1} \, dx$

b Un stade à la forme d'un rectangle dont deux côtés opposés se terminent par deux demi-cercle en dehors du rectangle de diamètre égale à la longueur de ce côté, si le périmètre du rectangle est égale à 400 mètres, démontrez que l'aire du stade est maximale quand ce stade à la forme d'un cercle, puis trouvez la longueur de son rayon.

5 a Si $f(x) = x^3 - 3x + 3$, trouvez :

1) les valeurs minimale et maximale absolues sur l'intervalle [0, 2]

2) l'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f et les droites $x = 0$ et $x = 2$ et $y = 0$

b Trouvez le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $xy = 2$ et les droites $x = 1$ et $x = 2$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses

Épreuve 8

Premièrement : Répondez à la question suivant :

1 **Complétez ce qui suit :**

a Si $x^3 y^2 = 1$, alors : $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{y=1} =$ ....

b $\frac{d}{dx}\left[7 e^{\sec x}\right] =$ ....

c Le point d'inflexion de la fonction f où $f(x) = x^3 - 3x - 1$ est : ....

d Si la fonction f est continue sur l'intervalle [2 , 7], alors : $\int_2^7 f(x)\,dx + \int_7^4 f(x)\,dx$

= ....

e L'aire de la région limité par les courbes $y = x^2$ et $y = 4x$ est égale à .... unités carrées

f Si $y = x^2 \ln \frac{x}{a}$, $a \neq 0$, alors: $\left[\frac{d^3 y}{dx^3}\right]_{x=4} =$ ....

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

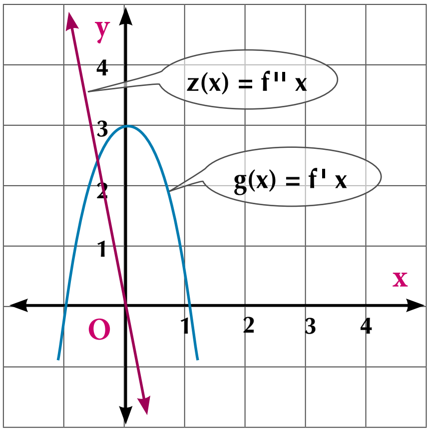
2 **Trouvez :**

a $\int \frac{(x+3)^3 - 27}{x}\,dx$, $\int x^2 e^{-x}\,dx$

b Trouvez l'équation de la tangente à la courbe $f(x) = 2\,\text{tg}^3 x$ au point d'abscisses $\frac{\pi}{4}$ appartenant à la courbe

3 **a** Trouvez $\int_0^5 |x - 2|\,dx$

b La figuier ci-contre montre les courbes de g et z où :
$g(x) = f'(x)$, $z(x) = f''(x)$ et
f est une fonction polynomialle en x .
Tracez la courbe de f sachant qu'elle passe par les points (-1, 0) , (1, 4)



4 **a** Déterminez les valeurs minimale et maximale absolues sur l'intervalle [0, 2] où $f(x) = 3\sqrt{4 - x^2}$

b Une barre de 5 m de long l'une de ses extrémités est fixé par un charnier sur un sol horizontal et l'autre extrémité est élevée verticalement vers le haut par un treuil d'un taux de 1 m/min, trouvez le taux de diminution de la projection de la barre sur le sol quand sa hauteur est 3 mètres du sol.

5 **a** Un trapèze est tracé dans un demi-cercle dont la base du trapéze est le diamètre du demi-cercle , déterminez la mesure de l'angle à la base du trapèze pour que l'aire du trapèze soit maximale.

b Si A est la région limitée par la courbe de la fonction $x\,y = 4 + x^2$ et les droites $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$. Trouvez :

1) l'aire de la région A à une unité carrée près .

2) le volume du solide engendré par la rotation de la région A au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses .

Épreuve 9

Premièrement : Répondez à la question suivante :

1 **Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées**

1- Si $x = 2n^2 + 7$, $y = \sqrt{n^3}$, $n = 1$, alors : $\frac{dy}{dx}$ est égale à :

a $\frac{3}{8}$ b $\frac{3}{4}$ c 2 d 6

2- La courbe de la fonction f est convexe vers le bas si f(x) est égale à :

a $2 - x^2$ b $2 + x^3$ c $2 - x^4$ d $2 + x^4$

3- Si la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 + k\,x^2 + 4$; $k \in R$, admet un point d'inflexion en $x = 2$; alors k est égale à :

a -6 b -3 c 6 d 9

4- Si f est une fonction continue sur R , $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 7$, $\int_{5}^{3} f(x)\,dx = -11$, alors : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ est égale à:

a - 4 b 18 c -18 d 77

5- $\int_{-1}^{3} | x - 1 |\,dx$ est égale à :

a -6 b 0 c 4 d 8

6- L'aire de la région limitée par la courbe de la fonction $y = x^3$ et les droites $y = 0$ et $x = 2$ est égale à :

a 1 b 2 c 4 d 8

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes :

2 **a** Trouvez : $\int \frac{3x}{x^2-1}\,dx$, $\int 9x^2\,e^{3x}\,dx$

b Trouvez la mesure de l'angle que fait la tangente à la courbe $y^3 = x^2$ aves le sens positive de l'axe des abscisses en $x = 8$ à une minute près .

3 **a** Si $\sin x = x\,y$, démontrez que : $x^2\,(y + y'') + 2\cos x = 2\,y$

b Si la courbe $y = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ a deux tangentes parallèles l'un d'eux passe par le point (-1 ; 2), trouvez l'équation de l'autre tangente.

4 **a** Un ballon monte verticalement vers le haut d'un taux constant de 28 m / min, On a observé l'angle d'élévation d'un point du sol qui se trouve à 200 mètres du lieu de départ du ballon. Trouvez le taux de variation de l'angle d'élévation quand le ballon à 200 mètres de hauteur.

b Si la pente de la tangente en un point (x ; y) de la courbe $y = f(x)$ est égale à $3(x^2 - 1)$ Trouvez les valeurs maximale et minimale relatives de la fonction et le point d'inflexion s'il existe sachant que la courbe passe par le point (-2 ; - 1). Puis tracez la courbe de la fonction f .

5 Si la droite $\overleftrightarrow{AB}$ coupe la courbe de la fonction f au point C (x , y) où $x > 0$, A (0; 2), B (6, 4) et $f(x) = \frac{9}{x}$, Trouvez :

a l'équation de la droite $\overleftrightarrow{AB}$

b les coordonnées du point C

c l'équation de la normale à la courbe de f au point C et montrez qu'elle passe par le point d'origine O

d le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par la normale $\overleftrightarrow{OC}$ et la courbe de la fonction f et la droite x = 6 au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses.

Épreuve 10

Premièrement : Répondez à la question suivante :

1 **Complétez ce qui suit :**

a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3} =$ ....

b $\frac{d}{dx}(5 - 2 \cot g\, x)^3 =$ ....

c Si la fonction f où $f(x) = k x^3 + 9 x^2$ admet un point d'inflexion en $x = -1$; alors k = ...

d $\int_{-1}^{3} (4x^3 - 6x^2 + 5)\, dx =$ ....

e Si la fonction f est continue sur l'intervalle [1 , 4], alors $\int_{1}^{4} f(x)\, dx + \int_{4}^{1} f(x)\, dx =$ ....

f L'aire de la région limitée par les courbes $y = x^4 + 1$ et $y = 2x^2$ est égale à .... unité carrée.

Deuxièmement : Répondez aux trois seulement des questions suivantes

2 **a** Trouvez : $\int \text{tg}(3x + 1)\, dx$ et $\int (1 - x^2)(3x - x^3)^5\, ds$

b Si les deux équations paramétriques de la fonction f où y = f(x) sont :

$x = 2n^3 + 3$ et $y = n^4$, Trouvez en n = 1 :

1) l'équation de la tangente à la courbe de f

2) $\frac{d^2y}{dx^2}$

3 a Etudiez la convexité de la courbe de la fonction f où $f(x) = x^3 - 1$ en précisant les points d'inflexions s'ils existent .

b Si $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx = 9$, $\int_{5}^{3} f(x)\, dx = 4$, trouvez la valeur de

$\int_{-2}^{5} [\, 3 f(x) - 6 x \,]\, dx$

4 a Trouvez l'aire de la région comprise entre les courbes $y + x^2 = 6$, $y + 2x - 3 = 0$

b Un récipient à la forme d'un cylindre droit d'une hauteur intérieur de 9 cm et la longueur du rayon intérieur de sa base est 6 cm. On met une barre métallique de longueur 16 cm à l'intérieur du cylindre, le taux d'acroissement de la longueur de la barre à l'intérieur du récipient est 2 cm/s, quand l'extrémité inférieure se glisse sur le diamétre de la base. Trouvez le taux de grissement de l'extrémité inférieure de la barre quand il arrive à la fin du diamètre.

5 a Si le taux de variation de la pente de la tangente de la courbe d'une fonction en un point quelconque de la courbe (x ; y) est $6(1 - 2x)$ et la courbe admet un point critique en $x = 1$ et une valeur minimale relative égale à 4 .

1) Trouvez l'équation de la normale en $x = -1$

2) Tracez la courbe de f en montrant les valeurs maximale et minimale relatives ainsi que les points d'inflexion s'ils existent.

b **Trouvez** le volume du solide engendré par la rotation de la région limité par les courbes $y = x^3 + 1$ et $y = 0$ $x = 0$ et $x = 1$ au cour d'une révolution autour de l'axe des abscisses.

Réponses de quelques exercices

Unité 1

Exercice (1- 1)

(1) -1 (2) 18 (3) $\frac{3}{8}$ (4) 10

(5) 6 (6) $\frac{-10}{27}$ (7) $3x^2 - 2 \text{ cosec } x \text{ tg } x$

(8) $3 \text{ cosec } (2 - 3x) \text{ cotg } (2 - 3x)$

(9) $\frac{-1}{x^2} \text{ cosec}^2 (\pi - \frac{1}{x})$ (10) $- \text{cosec}^2 x \sec^2 (\text{cotg } x)$

(11) $-2 \text{ cosec}^2 x \, (1 + \text{cotg } x)$

(12) $2 \text{ cosec } (\pi - 2x) \text{ cotg } (\pi - 2x)$

(13) $-2 \sin 2x + 15 \text{ cosec}^2 3x$

(14) $3 \sec^2 3x + 2 \text{ cosec } 2x \text{ cotg } 2x$

(15) $3 \sin 6x + 2 \sec^2 x \text{ tg } x$

(16) $2 \text{ cosec } x \sec^2 2x + \text{tg } 2x \text{ cosec } x \text{ tg } x$

(17) $\frac{-3}{2\sqrt{x}} \cot^2 \sqrt{x} \quad \csc^2 \sqrt{x}$

(18) $-4 x \csc^2 (1 + x^2) \text{ cotg } (1 + x^2)$

(19) $12 \sec^2 (2x + \pi) \text{ tg } (2x + \pi)$

(20) $- \frac{- \text{cosec } x \text{ cotg } x}{2\sqrt{1 + \text{cosec } x}}$

(21) $2x \text{ cotg } 3x - 3x^2 \csc^2 3x$

(22) $\frac{\text{cosec } x}{\text{cosec } x + \text{cotg } x}$

(23) $- \frac{3(2x + 3) \csc^2 3x \times 2 \text{ cotg } 3x}{(2x + 3)^2}$

(24) $- \frac{2 \sec x \text{ tg } x}{(1 + \sec x)^2}$ (25) $\frac{-\pi}{4}$

(27) (a) -2 (b) 2

Exercice (1-2)

(1) c (2) c (3) d

(4) a (5) b (6) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$

(7) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{3y^3} = -\frac{1}{3} (\frac{x}{y})^3$

(8) $\frac{dy}{dx} = 1$ (9) $\frac{dy}{dx} = - \frac{3(x^2 + 2y)}{2 (3x - 2)}$

(10) $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x} = \frac{2x - y}{x - 2y}$

(11) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + \cos y}$

(12) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}$

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \csc^2 x + \text{cosec } y}{\text{cotg } x + x \text{ cosec } y \text{ cotg } y}$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cos x - 2 x \sin y}{x^2 \cos y - 2y \sin x}$

(15) $\frac{dy}{dx} = \text{cotg } 2x \text{ cotg } 2y$

(16) $\frac{dy}{dx} = -\frac{127}{8}$ (17) $\frac{dy}{dx} = -\text{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

(18) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ (19) (-3) (20) $(-\frac{2}{3})$

(21) (a) La courbe a une tangente verticale en n $= \frac{2}{3}$ or n = 1

(b) La courbe a une tangente horizontale en n $= -\frac{1}{4}$

Exercice (1-3)

(1) a = 1 , b = 11 , c = 19 , d = -23

y = 67 , y' = 44

(2) $y''' = 60x^2 - 24$ (3) $y''' = \frac{12}{(x + 1)^4}$

(4) $y''' = -8\cos (2x - 7)$

(5) $y''' = -27 \sin (\pi - 3x)$

(6) $y''' = -4\cos 2x$ (7) $y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x - 5)^5}}$

(14) $\frac{2}{27}$ (15) $\frac{1}{48}$ (16) $-\frac{1}{9}$

Exercice (1 - 4)

(1) (a) Equation de la tangente: x + y - 10 = 0

, Equation de la normale: x - y + 4 = 0

(b) 12 x - y - 86 = 0

x + 12 y + 17 = 0

(c) 12 x - y - 38 = 0

x + 12 y + 21 = 0

(2) (a) $y - 2 = 4 (x - \frac{\pi}{4})$

$y - 2 = -\frac{1}{4} (x - \frac{\pi}{4})$

(b) $y + 1 = -3\sqrt{3} (x - \frac{\pi}{3})$

$y + 1 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (x - \frac{\pi}{3})$

(3) (a) 2 x - 3y - 26 = 0 3x + 2 y = 0

(b) x + y + 2 = 0 x - y = 0

(c) x - 2 y + 5 = 0 2 x + y = 0

(d) $y = 0 , x = \frac{\pi}{2}$

4 a $2x - 3y - 4 = 0$ $3x + 2y - 19 = 0$

b $2x - y - \sqrt{3} = 0$ $\sqrt{3}(x + 2y) = 4$

5 $k = 4$ $y + 2 = 0$

6 8.5 unité carré

7 at point a (0, 1): $x - y + 1 = 0$

, $x + y - 1 = 0$

at point b (0, -1): $x + y + 1 = 0$

, $x - y - 1 = 0$

Exercice (1 - 5)

1 d 2 b 3 a 4 b

5 $\frac{dy}{dt} = -0.8$ Unité/ sec

6 $\frac{dA}{dt} = 160\pi$ cm^2/ sec

7 $\frac{dA}{dt} = -3\sqrt{3}$ cm^2/ sec

8 $\frac{dy}{dt} = 50$ gm/cm^2/ sec

9 $\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{20\pi}$ cm / sec

$\therefore \frac{dA}{dt} = -4$ cm^2 / sec

10 -3cm/ min $\therefore \frac{d\theta}{dt} = -0.01$rd / min

11 48 m/ min 13 -60 cm^2 / h

Réponse de l'exercice généraux

1 d 2 c 3 c 4 b

5 b

6 a $\frac{dy}{dx} = 1 - 2\csc^2 2x$

b $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 5\sec 5x \, tg \, 5x$

c $\frac{dy}{dx} = 2 + 10\pi^2 x \sin(\pi x)^2$

d $\frac{dy}{dx} = -2\pi \sin 2(\pi x + 1)$

e $\frac{dy}{dx} = 0$

f $\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{cosec} 2x (2\sec^2 2x - 1)$

7 $\frac{dx}{d\theta} = -2\sqrt{3}\, r$

8 a $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y}$ b $\frac{dy}{dx} = \frac{-5x}{18y^2}$

c $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x - 2y}$ d $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - x}{y + 2}$

e $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + \cos x}{x}$

f $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y$

9 a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}(2x + 1)(x + 2)^2$

b $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-6}{25}$

11 a $x\sqrt{3} - 9y + 24 = 0$

$3\sqrt{3}x + y - 12 = 0$

b $2x - y = 0$ $4x + 8y - 5\pi = 0$

12 a $3x + y - 10 = 0$ $x - 3y = 0$

b $x + 2y + 1 = 0$ $2x - y - 3 = 0$

13 1 unité carré

16 99cm/sec 18 -1 Unité /sec

19 -8 cm^2 /sec $\frac{8}{3}$ sec $\frac{784}{3}$ cm^2

20 $\frac{3}{4}$ k Unité /sec 21 10cm

22 $-\frac{5}{3}$ m/ min $\therefore \frac{d\theta}{dn} = -\frac{5}{3}$rd / min

23 -12 cm^3/sec 24 $-\frac{1}{72\pi}$ m / min

25 0.14 rad / min 26 -1rd / cosec

27 $\frac{3}{14}$ unité carré / sec

Réponse de l'epreuve cumulative

1 c 2 a 3 c 4 d

5 $\frac{6n^2 - 6n + 2}{(1 - 2n)^3}$

6 $x - 3y + 48 = 0$ 8 20

9 a $x - 6y + 18 - \frac{\pi}{4} = 0$

b 19.3 cm^2 /cosec

10 $-\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm/ cosec

Unité 2

Exercice 2 - 1

1 d 2 c 3 b 4 b

5 e 6 e 7 e^x 8 e^4

9 2 10 1 11 e^4 12 -1

(13) $2 \ln a$ (14) e^{3} (15) e^{-1} (16) $\frac{3}{2}$

Exercice (2 - 2)

(1) b (2) d (3) d (4) c

(5) $15x^4 e^{3x^5}$ (6) $(2x - 1)e^{x^2 - x}$

(7) $-2(3^{x-1})^{-2} \ln 3$ (8) $5x e^{\frac{1}{2}(5x^2 - 3)}$

(9) $\frac{2}{2x - 7}$ (10) $\frac{2(x + 1)}{x (x + 2)}$

(11) $\frac{x + 14}{x (x + 7)}$ (12) $x [1 + 2 \ln x]$

(13) $\frac{8}{4x + 9} \log_3 e$

(14) $e^{3x} [\frac{3}{\log x} - \frac{\log e}{x - (\log x)^2}]$

(15) $e^x \operatorname{cosec} e^x \operatorname{tg} e^x$

(16) $6 e^{3x} - \frac{5}{x} - \log_2 e$ (17) $- 1.57$

(18) $\frac{5}{2}$ (19) -2.64

(20) $\frac{d y}{d x} = - y$ (21) $\frac{d y}{d x} = \frac{- 58 y}{x^2}$

(22) $x^{\sin x} [\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x]$

(23) $e^x \times e^{e^x}$ (24) $e x^{e - 1} \times e^{x e}$

(25) $x^{\frac{1}{x} - 2} (1 - \log_e x)$

(26) $\frac{3 n^2}{2 e^{2n}}$ $\frac{3}{2} \times \frac{n (1 - n)}{e^{4n}}$

(27) $\frac{1}{3} \times n^2$ $\frac{1}{9} \times n^2$

(28) $\frac{1}{2}$ (31) $x = \frac{2}{3}$

(32) $e^{x} + 3 y - e - \frac{9}{e} = 0$ (33) $\frac{120}{e^3}$

(34) 12.8 gm/ day 8.7 gm/ day
8 gm / day

Exercice 2-3

(1) d (2) c (3) a (4) c

(5) $\frac{1}{4} e^{4x} + c$ (6) $x^3 + 2e^x + c$

(7) $4 \ln |x| + e^{-x} + c$

(8) $-\frac{1}{3} e^{1-3x} + c$ (9) $\frac{7}{9} e^{3x-4} + c$

(10) $\frac{2}{3}(e^x + 1)^3 + c$

(11) $\frac{1}{2} e^{2x} + 2 e^x - 4 e^{-x} + c$

(12) $\frac{1}{3} e^{x^3 + 1} + c$ (13) $2 \ln (e^x + 1) + c$

(14) $\frac{1}{4} \ln | 4 x - 1| + c$ (15) $\frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c$

(16) $\ln | \operatorname{tg} x| + c$

(17) $\ln | \sin x - \cos x | + c$

(18) $\ln | 1 + \sin x | + c$ (19) $\ln | \operatorname{cosec} x - 1| + c$

(20) $\ln|\ln x| + c$

(21) $2 \ln | x + 1| + \frac{2}{x+1} + c$

(22) $\frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$ (23) $\ln |x^3 - 1| + c$

(24) $\ln |x^3 - 5x + 1 | + c$

(25) $4\ln|x| + e^{x} + c$

(26) $4 \ln | \ln 3x | + c$ (27) $\frac{1}{3}(1 + \ln x)^3 + c$

(28) $f (3) \simeq 4.11$

Réponse de l'exercice généraux

(1) d (2) a (3) c (4) d

(5) s.s = {103} (6) s.s = {25}

(7) s.s = {0.399} (8) s.s = {1.91}

(9) 2.197} = م.ح} (10) s.s = {1.654}

(11) e^6 (12) e^{-1} (13) e^{-2} (14) $7e^x$

(15) $6x e^{3x^2 + 1}$ (16) $2x e^{-3}$

(17) $\frac{d y}{d x} = \frac{2x}{x^2+3}$ (18) $\frac{d y}{d x} = 2 + \ln x^2$

(19) $e^{x} [\frac{2x}{x^2+1} + \ln (x^2+1)]$

(20) $\frac{d y}{d x} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

(21) $= 3x^2$ (22) 0

(23) $\frac{d^2y}{d x^2} = \frac{3}{4e^n}$ (24) $\frac{d^2y}{d x^2} = \frac{-4}{3n^6}$

(25) $\frac{d^3y}{d x^3} = \frac{2}{x^3}$ (26) $\frac{d^3y}{d x^3} = 6 + 8 e^{2x}$

(27) $\frac{d^3y}{d x^3} = - \frac{1}{x^2 \ln 10}$

(30) $\frac{d y}{d x} = 2^x [1 + (x + 1)\ln 2]$

(31) $\frac{dy}{dx} = 3^{x^2+2} [\frac{x^2+3}{x} + 2x \ln x]$

(32) $-[\sin x \ln(1-3x) + \frac{3\cos x}{1-3x}] (1-3x)^{\cos x}$

(33) $\frac{dy}{dx} = e^x (\frac{1}{x} + \ln x) x^{e^x}$

(34) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ (35) $x = \sqrt{e}$

(36) $x = 3$ (37) $x = \sqrt{2}$

(38) $\frac{dy}{dx} = \frac{e-1}{e}$ (39) $3\ln |x^2 + 3x| + c$

(40) $2 \ln |x| + c$

(41) $3\ln |x| - 2 e^{-2x} + c$

(42) $e^3 \ln |x| + \frac{1}{2} x^2 \ln^3 + c$

(43) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3} e^x + c$

(44) $\frac{1}{2}\text{cotg}^2 x - \ln |\sin x| + c$

(45) $\simeq 7.456$ Unité de longueur

(46) $3x - y - 1.52 = 0$ $x + 3y - 15.44 = 0$

(47) $y = 8 \ln |x| - 8 \ln 4 + 2$

(48) $x \in \{1.65, -1.65\}$

Réponse de l'epreuve cumulative

(1) c (2) d (3) b (4) c

(5) (a) $y' = 6x^2 (x^3+1)$

(b) $y' = \frac{2}{x} - \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4x}}$

(c) $y = 2(x - \frac{1}{x})$

(7) (a) $x^2 + 3 \ln |x| + c$

(b) $-2 e^{-\sqrt{x}} + c$

(c) $\frac{3}{2}\ln |\ln x| + c$

(8) $f(x) = 7(x + 1 - \ln 2) - 2 e^x$

Unité 3

Exercice (3-1)

(1) f est décroissante dans $]-\infty, 2[$
f est croissante dans $]2, \infty[$

(2) f est décroissante dans $]-\infty, 3[$
f est croissante dans $]3, \infty[$

(3) f est croissante dans $]-\infty, 0[$
f est décroissante dans $]0, 4[$
f est croissante dans $]4, \infty[$

(4) f est décroissante dans $]-\infty, -\sqrt{3}[$
f est croissante dans $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$
f est décroissante dans $]\sqrt{3}, \infty[$

(5) f est décroissante dans $]-\infty, -1[$
f est croissante dans $]-1, \infty[$

(6) f est croissante dans $]-\infty, 2[$
f est décroissante dans $]2, \infty[$

(7) f est croissante dans $]-\infty, 0[$
f est croissante dans $]0, \infty[$

(8) f est croissante dans $]-\infty, -2[$
f est croissante dans $]-2, \infty[$

(9) f est croissante dans $]1, 2[$,
f est décroissante dans $]2, \infty[$

(10) f est croissante dans $]0, \infty[$

(11) f est croissante dans $]-\infty, 0[$
f est décroissante dans $]0, \infty[$

(12) f est décroissante dans $]-\infty, \infty[$

(13) f(x) f est croissante dans $]0, \frac{\pi}{4}[$

(14) f est décroissante dans $]0, \frac{\pi}{2}[$
f est croissante dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$
f est décroissante dans $]\frac{3}{2}\pi, 2\pi[$

Exercice 3-2

(1) $f(0) = 0$ valeur maximale relative
$f(2) = -4$ valeur minimale relative

(2) $f(-1) = -2$ valeur maximale relative
$f(1) = 2$ valeur minimale relative

(3) $f(0) = 0$ valeur maximale relative
$f(1) = -1$ valeur minimale relative

(4) $f(-2) = 6$ valeur maximale relative ,
$f(0) = 2$ valeur minimale relative

(5) $f(-1) = -1$ valeur minimale relative,
$f(0) = 0$ valeur maximale relative
$f(1) = -1$ valeur minimale relative

6 $f(\frac{-2}{\sqrt{3}}) = \frac{-16}{3\sqrt{3}}$ valeur minimale relative
$f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$ valeur maximale relative

7 $f(-1) = 2$ valeur maximale relative,
$f(1) = -2$ valeur minimale relative

8 $f(0) = 3$ valeur maximale relative

9 $f(-2) = 0$ valeur minimale relative

10 $f(2) = 3$ valeur minimale relative

11 $f(-1) = -3$ valeur maximale relative
$f(3) = 5$ valeur minimale relative

12 No valeur maximale relative or valeur minimale relative

13 $f(0) = 4$ valeur maximale relative

14 $f(2) = e^2$ valeur maximale relative

15 $f(0) = 2$ valeur minimale relative

16 $f(1) = 1$ valeur minimale relative

17 $f(2) = 8 \ln -4 \simeq 1.55$ valeur maximale relative

18 $f(1) = 0$ valeur minimale relative

19 La fonction a une voleur maximale absolue =3, et une valeur minimale absolue = -1

20 La fonction a une voleur maximale absolue = 2 , et une valeur minimale absolue = 1

21 La fonction a une voleur maximale absolue = $\sqrt{2}$, et une valeur minimale absolue = - $\sqrt{2}$

22 La fonction a une voleur maximale absolue $\simeq$ 0.37, et une valeur minimale absolue = 0

23 a = 1 , b = -9 , c = 15 , d = 0

Exercice (3-3)

1 a [-4, 5] b {-2,2} c]0 , 5[
d]-4, 0[e (0 , 0) f 2 g 8

2 La courbe est convenevers le haut pour tout $x \in R$, pas de point d'inflexion

3 Convexe vers le haut dans]- ∞, 1[
convexe vers le bas dans] 1 , ∞[, (1,-1) point d'inflexion

4 Convexe vers le haut dans]2 , ∞[, convexe vers le bas dans]- ∞, 2[, (2, 46) point d'inflexion.

5 Convexe vers le haut dans $]\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}[$
convexe vers le bas $]-\infty, \frac{2}{\sqrt{3}}[,]\frac{-2}{\sqrt{3}}, \infty[$
points d'inflexion: $(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{64}{9})$, $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{64}{9})$

6 Convexe vers le haut dans]-1, 0[
vers le bas dans] -∞, -1 [,]1,∞[
point d'inflexion: $(-1, \frac{3}{2})$, $(1, \frac{3}{2})$

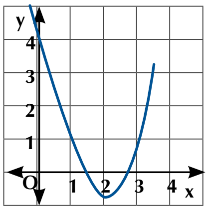
7 Convexevers le haut dans] -2, 2[
vers le bas dans] - ∞, -2[,]2, ∞[
pas de point d'inflexion

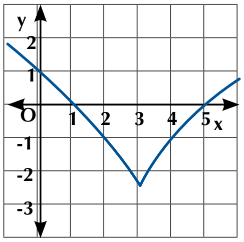
8 Convexevers le haut dans] - ∞, 4[
vers le bas] 4 ,∞[pas de point d'inflexion car il n'ya pas de tangente au point (4,4)

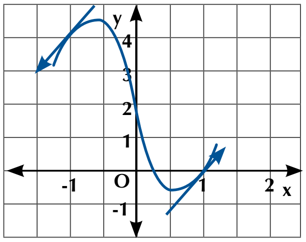
9 Convex vers le haut dans] -∞, 0 [,]0,∞[
pas de point d'inflexion

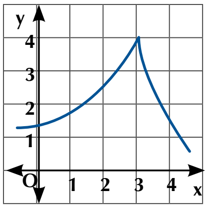
10 $\theta = tg^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

12 a = 3 , b = 4

13


14


15


16 

17 (0 , 5) avec l'axe des y
(1, 0) , (5 , 0) avec l'axe des x .
f(3) = -4 valeur minimale relative

18 (0 , 3) avec l'axe des y
($\sqrt{3}$, 0) , (-$\sqrt{3}$, 0) avec l'axe des x .
f(0) = 3 valeur maximale relative

19 Point d'inflexion: (1,1)
f(0) = 3 valeur maximale relative
f(2) = -1 valeur minimale relative
points supplentaires : (-1, -1) , (3, 3)

20 Point d'inflexion: (0 , 2)
f(1) = $\frac{4}{3}$ valeur minimale relative f(-1) = $\frac{8}{3}$ valeur maximale relative, points supplentaires: (3 , 8) , (-3 , -4)

21 Point d'inflexion: (0 , 1)
f(2) = -1 valeur minimale relative
f(-2) = 3 valeur maximale relative
points supplentaires: (4 , 3) , (-4 , 1)

22 Point d'inflexion: (2 , -2)
f(1) = -4 valeur minimale relative
f(3) = 0 valeur maximale relative
Intersection avec les axes : la courve passe par le point d'origine
points supplentaires: (4 , -4)

23 Point d'inflexion : (0 , 2)
f(1) = 4 valeur maximale relative
f(-1) = 0 valeur minimale relative
Intersection avec les axes:
(2 , 0) , (-1 , 0) avec axe des x , (0 , 2) avec axe des y
points supplentaires: (-2, 4)

24 Point d'inflexion: (0 , 2)
f(2) = 0 valeur minimale relative
f(-4) = 0 valeur maximale relative
Intersection avec les axes: (0 , 2) avec axe des y
(-4, 0) , (2 , 0) avec l'axe des x .

25 Point d'inflexion : (1 , -2) only
f(2) = -4 valeur minimale relative
Point d'inflexion: (-1 , 3)

26 f(0) = 4 maximale relative pas de point d'inflexion point supplémentaire = (5 , 5)

Exercice (3-4)

1 15 , 15 2 2 , 3

3 (1)

4 900 unité carrée. 5 r = 7.5 cm

6 20 , 20, 20 cm.

7 5 $\sqrt{2}$ cm, 5 $\sqrt{2}$ cm

8 80000 unité carrée 9 $\frac{h}{r} = 2$

10 $\frac{44100}{\pi}$ unité carrée

11 15$\sqrt{2}$, 15$\sqrt{2}$ cm

12 De la baile 3 , 9, 18 cm

14 (4 , 4) , (4 , -4) 15 $\frac{6}{\sqrt{5}}$ unité de longueur

16 90° 17 2 $\sqrt{2}$ Ampere

18 2250 19 x = $\frac{10}{3}$ cm

Réponse de l'exercice généraux

1 c 2 b 3 d

4 a 5 d

6 f est décroissante dans] - ∞, 3 [est croissante dans] 3 , ∞ [

7 f est croissante dans] - ∞, 0 [,] $\frac{1}{2}$, ∞[
est décroissante dans] 0 , $\frac{1}{2}$ [

8 f est croissante dans] - ∞, ∞[

9 f est croissante dans]- ∞, 2[
est décroissante dans] 2 , ∞[

10 f est croissante dans] - ∞, 0 [,]$\frac{4}{3}$, ∞[
est décroissante dans] 0 , $\frac{4}{3}$ [

11 f est décroissante dans]- ∞, 3[
est croissante dans]3, ∞[

12 f est décroissante dans] - ∞, 0 [,]0 ,∞[

13 f(x) = $\frac{x}{x^2}$ f est croissante dans]- ∞, -2 [,] -2, ∞[

14 f est croissante dans] - ∞, 1[,]1 , ∞[

15 Convexe vers le bas $x \in R$

16 Convexe vers le haut dans $]-\infty, 1[$
Convexe vers le bas $]1, \infty[$,
$(1, -2)$ point d'inflexion

17 Convexe vers le haut dans $]-\infty, 2[$ Convexe vers le bas $]2, \infty[$ $(2, -7)$ point d'inflexion

18 convexe vers le haut dans $]-\infty, 0[$, $]3, \infty[$
convexe vers le bas $]0, 3[$
point d'inflexion: $(0, 0)$, $(3, 81)$

19 convexe vers le bas $]-\infty, 0[$, $]2, \infty[$
convexe vers le haut dans $]0, 2[$,
point d'inflexion: $(2, 0)$

20 convexe vers le haut dans $]-\infty,0[$
convexe vers le bas $]0, \infty[$
point d'inflexion: $(0, 7)$

21 $f(-3) = 13$ valeur maximale relative

22 $f(0) = 7$ valeur maximale relative
$f(1) = 6$ valeur minimale relative.

23 $f(\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$ valeur maximale relative
$f(2) = 0$ value of valeur minimale relative

24 $f(-2) = -8$ valeur minimale relative
$f(0) = 8$ valeur maximale relative
$f(2) = -8$ valeur minimale relative

25 $f(0) = -1$ valeur minimale relative.

26 f n'est pas continue $x = 2$
$f(1) = 2$ valeur maximale relative
$f(3) = 6$ valeur minimale relative

27 $f(-1) = -\frac{1}{2}$ valeur minimale relative
$f(9) = \frac{1}{18}$ valeur maximale relative.

28 $f(2) = 0$ valeur minimale relative.

29 -1.6 value of valeur minimale relative

30 la fonction a une valeur minimale absolue $= -9$
valeur maximale absolue = 18

31 valeur minimale absolue = 0
valeur maximale absolue = 81

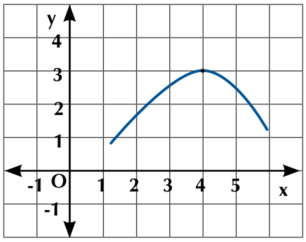
32 valeur maximale absolue = 2
valeur maximale absolue = 18

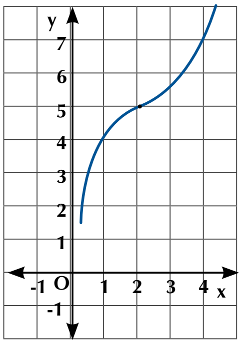
33 valeur maximale absolue = 2
valeur minimale absolue = $\frac{7}{8}$

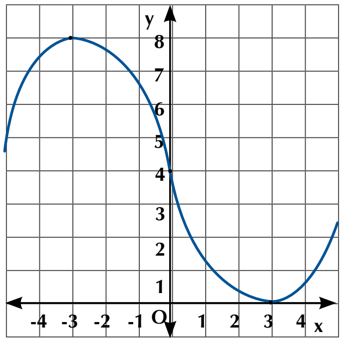
34 valeur maximale absolue = 16,
valeur minimale absolue = -6

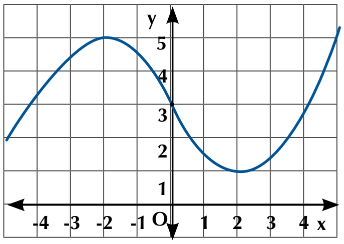
35 36 valeur maximale absolue, -4 valeur minimale absolue

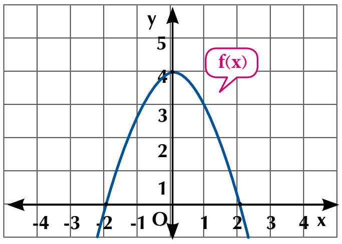
36 -54 valeur minimale absolue, 3 valeur maximale absolue

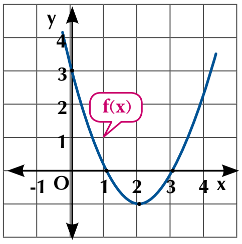
37


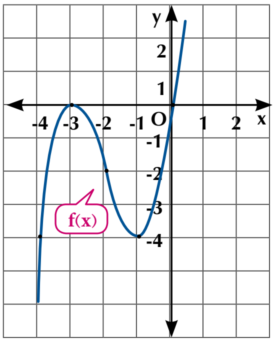
38


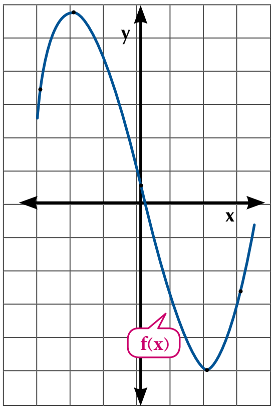
39


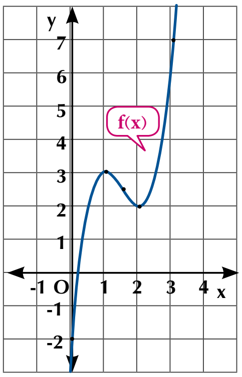
40


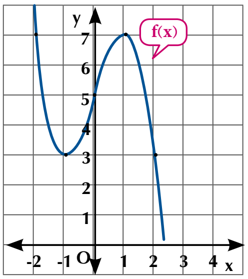
41


42


43


44


45


46


47 $\therefore$ d = 6 , c = 0 $\quad \therefore$ a = 2 , b = -3

48 Les dimension du rectangles sont 5 mètres , 5 mètres

49 **b** 28 unité carrée

50 $\mathbb{R} = 250\,\pi\,\sqrt{3}$ cm^3

51 $10\sqrt{2}$ cm

53 2 unité carrée $\quad$ 54 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ meter

Réponse de l'epreuve cumulative

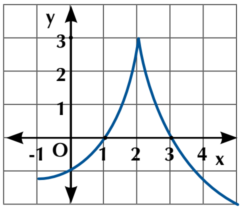
1 **a**]2 ,∞ [**b** x = 2 **c** x = 5
d] -∞ , -1[,] 5, ∞[

2 **a** en x = $\frac{-b}{a}$ il y a une valeur maximale relative

b f est croissante dans] -∞ , $\frac{5}{2}$ [
et décroissante]$\frac{5}{2}$, ∞[

3 (-1, 0) , (0, 1) , (1, 0) point critique
croissante :]-1, 0[,]1, ∞[
décroissant :] -∞ , -1[,] 0, 1[

4 point critique : (2, 8)
convexe vers le haut dans]-∞, 2[
Convexe vers le bas]2, ∞[point d'inflexion : (2, 8)

5


6 **a** a = -3 , b = 3
b Convex : convexe vers le haut dans]-1 ,∞[ ] 1 , ∞[pas de point d'inflexion

7 (2 , 3) $\quad$ 8 ($\frac{7}{4}$, 0)

Unité 4

Exercice 4 -1

1 b $\quad$ 2 d $\quad$ 3 b

4 $\frac{1}{30}$ (x - 2)^5 (5x + 2) + c

5 $\frac{1}{30}$ (x -2)^4 [5x^2 + 4x + 2] + c

6 $\frac{1}{84}$ (x^2 -1)^6 (6x^2 + 1) + c

(7) $\frac{2}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}}\ (3x-8)+c$

(8) $\frac{2}{35}(x+1)^{\frac{5}{2}}\ (5x-9)+c$

(9) $\frac{1}{70}(x^2+3)^5(5x^4-5x^2+3)+c$

(10) $\frac{1}{6}\ \ln(3x^2+2)+c$

(11) $x-\ln|x+1|+c$

(12) $\frac{2}{3}\ (x+5)\sqrt{x-1}\ +c$

(13) $\frac{1}{15}\ (3x^2+2x+2)\sqrt{2x-1}\ +c$

(14) $-\frac{1}{2}\ e^{-x^2}+c$ (15) $-\ln|e^{-x}+x|+c$

(16) $\frac{1}{2}(\ln 5x)^2+c$ (17) $\frac{1}{4}(\ln x)^4+c$

(18) $\ln\ |\ln x|\ c$ (19) $(2x-1)\ e^{2x}+c$

(20) $\frac{1}{2}\ (x^2-1)\ e^{x^2}+c$ (21) $-\frac{2x+1}{4e^{2x}}\ +c$

(22) $\frac{1}{16}x^4\ (4\ln x-1)+c$

(23) $x\ (\ln x^2-2)+c$

(24) $i=x\ [(\ln x)^2-2\ln x+2]+c$

(25) $-\frac{1}{x}(1+\ln x)+c$

(26) $\frac{e^{2x}}{4}\ [2x^2+2x+1]+c$

(27) $\frac{1}{4}\ x^2\ [2(\ln x)^2-2\ln x+1]+c$

(28) $y=\ln|x-3|+3$

(29) $y=\frac{2}{15}\ (x+1)^{\frac{3}{2}}\ (3x-2)+1$

(30) $y=x^3-3x+2$

$f(-1)=4$ valeur maximale relative

Exercice (4 -2)

(1) f (2) a (3) b (4) b

(5) $\sqrt{3}\ \sin x+c$ (6) $-\frac{1}{2}\ \text{cotg}\ (2x+3)+c$

(7) $-\cos x+c$ (8) $-\frac{1}{4}\ \cos 2x+c$

(9) $x+c$ (10) $x+\frac{1}{2}\ \cos 2x+c$

(11) $-\frac{1}{4}\ \cos^4 x+c$ (12) $\frac{1}{6}\ \sin^6 x+c$

(13) $\frac{1}{3}\ \sin(x^3+5)+c$ (14) $\frac{1}{6}\ (3+\sin x)^6+c$

(15) $\frac{1}{5}\ \sec^5 x+c$ (16) $\sin x-4\ \text{tg}\ x+c$

(17) $\frac{1}{2}\ x+\frac{1}{4}\ \sin 2x+\sin x+c$

(18) $\frac{5}{2}\ x+\frac{1}{4}\ \sin 2x+\text{tg}\ x+c$

(19) $\text{tg}\ x-\frac{1}{2}\ \sin 2x+c$

(20) $2y=9+14x+\cos 2x$

(21) $y=x^2+8+\text{tg}\ \frac{x}{2}$

(22) $y=2\ \text{cotg}\ x+3$

Exercice (4 - 3)

(1) c (2) d (3) 20 (4) 22

(5) 16 (6) $4(1-\sqrt{2})$ (7) $\frac{14}{3}$

(8) $\simeq$ 4.43 (9) 3

(10) $-\frac{1}{5}(4)^4$ (11) $\frac{112}{5}$ (12) $\frac{4}{\pi}$

(13) $\frac{1}{2}$ (14) $16-7e^3$

(15) a 8 b 12 c 6

(16) a 11 b zero c 6

(17) 20

Exercice (4 - 4)

(1) $5\frac{1}{4}$ unité carrée (2) 3 unité carrée

(3) 2 ln 3 unité carrée

(4) 6 unité carrée

(5) $\frac{9}{2}$ unité carrée (6) $\frac{16}{3}$ unité carrée

(7) c (8) d (9) c (10) b

(11) 12 unité carrée (12) 7 unité carrée

(13) $\frac{38}{3}$ unité carrée (14) $10\frac{2}{3}$ unité carrée

(15) 3 unité carrée (16) 2.25 unité carrée

(17) 2.5 unité carrée (18) 9 unité carrée

(20) 22 unité carrée

Exercice (4 - 5)

(1) d (2) b (3) b (4) c

(5) 9π unité cubique (6) 9π unité cubique

7) $\frac{3}{4}$ unité cubique

8) 24π unité cubique

9) $\frac{\pi}{3}$ unité cubique

10) 32π unité cubique

11) 8 unité cubique

12) $\frac{96}{5}$ unité cubique

13) 36π unité cubique

14) **Premiérement:** 8π unité cubique

Deuxémement: $\frac{512}{15}\pi$ unité cubique

15) 9π unité cubique

16) 50π unité cubique

Réponse de l'exercice généraux

1) c   2) d   3) a   4) a

5) c   6) $6x\,dx$ 7) $5(2x+3)^{\frac{3}{2}}dx$

8) $3(x+\frac{1}{x})^3(1-\frac{1}{x})dx$

9) $-5e^{-5x}\,dx$

10) $(2x+3)e^{2x^2+3x}\,dx$

12) $\frac{2x}{x^2+1}\,dx$

13) $\frac{-2}{x}\ln\frac{10}{x}\,dx$

14) $-3\,tg(3x-1)\,cosec^2(3x-1)\,dx$

15) $\int_{-2}^{5}x^2\,dx$

16) $\int_{-4}^{4}\sqrt{x+6}\,dx$

17) $\int_{3}^{6}k\,dx$

18) $\int_{-4}^{5}x^2\,dx$

19) a 15   b 6   c 9   d 15

20) x^3-2x^2+3x-4

21) $\frac{227}{12}$

22) $-\frac{7}{3}$ 23) $\frac{23}{3}$ 24) $\frac{46}{5}$ 25) 8π

26) π

27) $\frac{1}{20}(x-5)^4(4x+5)+c$

28) $-\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+c$

29) $\frac{1}{2}tg(x^2+2)+c$

30) $\frac{1}{4}\sec^4 x+c$

31) $\frac{1}{2}e^{x^2+3}+c$

32) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+x^2)+c$

33) $\frac{3}{5}(x-1)(2x+3)^{\frac{3}{2}}+c$

34) $\frac{1}{25}x^5[5\ln x-1]+c$

35) $e^{2x}[2x-1]+c$

36) $\frac{64}{3}$ unité carrée

37) $\frac{46}{3}$ unité carrée

38) $\frac{22}{3}$ unité carrée

39) a $\frac{2}{3}\pi$ unité d'aire

b $2\pi[2+\ln 3]$ unité cubique

40) $\frac{4\pi}{3}$ unité cubique

Réponse de l'epreuve comulative

1) b   2) c   3) b   4) c

5) d   6) d

7) a $\sqrt{x^2+6x}+c$

b $\frac{2}{35}(5x^2+12x+24)(x-3)^{\frac{3}{2}}+c$

8) 106

9) a $\frac{1}{3}\sec^3 x+c$ b $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3}+c$

10) a $\frac{1}{3}x^3[\ln x^2-\frac{2}{3}]+c$

b $\frac{1}{4}e^{2x^2-1}+c$

11) a zero b zero 12) -13 13) 4 unité carrée

14) a $\frac{4}{3}$ unité carrée b 2.4π unité cubique

Réponse de épreuves

Epreuve 1

1)

1	2	3	4	5	6
c	b	b	b	d	c

2) a $\frac{-1}{4}\cos^4 x+c$ b $\frac{1}{3}$

3) a $14x+5y-6=0$

b 2cm/min , 6 minutes

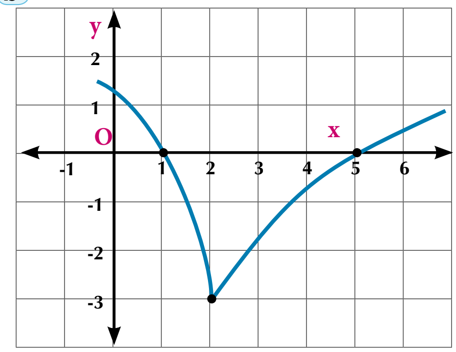
4) a f est décroissante dans $]\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}[$

f est croissante dans $]0,\frac{2\pi}{3}[$, $]\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$

b 64 unité carrée

5) a $\frac{27}{5}$ unité cubique

b



Epreuve 2

①

1	2	3	4	5	6
b	c	b	a	c	c

② a $\frac{1}{80}(2x-1)^4(8x+1)+c$

b $-\frac{1}{4}e^{-2x}[2x+1]$

③ a $y' = \frac{y\sin x - \cos y}{\cos x - x\sin y}$

b valeur maximale absolue = 5 ,
absolue max. value= 13

④ a $f(-1) = -1$ valeur minimale relative
$f(1) = 1$ valeur maximale relative $-\frac{2}{3}$

b $36\ cm^2/min$

⑤ a 9 unité carrée b $a = -6$, $b = 9$

Epreuve 3

①

1	2	3	4	5	6
b	b	d	c	a	a

② a $x(1+\ln x^2)$

b La courbe est convexe vers le hunt
$]-\infty, 4[\ ]4, \infty[$ pas de point d'inflexion

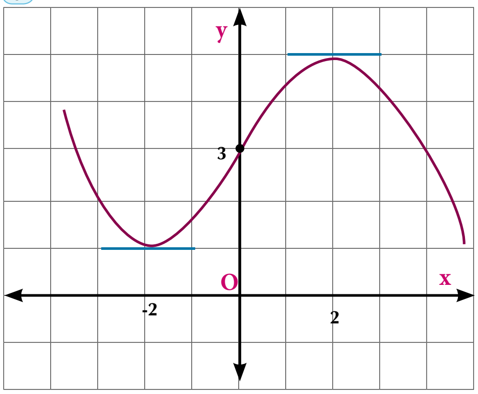
③ a $\frac{1}{20}(4x+5)(x-5)^4+c$
$(2x-1)e^{2x}+c$

b Valeur maximale relative = 0 ,
valeur minimale absolue = - 27

④ a $r = \frac{1}{7}$ unité de longueur b $L\sqrt{3}\ cm^2/cm$

⑤ a $\frac{9}{2}$ unité carrée

b



Epreuve 4

①

1	2	3	4	5	6
b	b	c	d	c	c

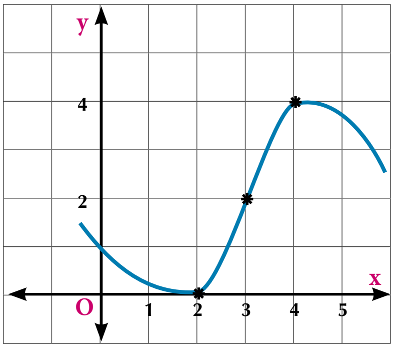
② a $x^3 - 2e^{2x} + c$

$\frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x+3}+c$

③ a -11 b $f(x) = 3x^2 - x^3$

④ a $\frac{1}{6}$ unité carrée

b



⑤ b $7.6\pi\ cm^2/cosec$

Epreuve 5

① a $x \in]-\infty, 0[$, $x \in]2, \infty[$

b $x \in \{0, 2\}$ c $]1, \infty[$

d $x = 0$ e $f(1) = 2$

f 4 unité carrée

② a $-2\ \text{cotg}\ \frac{x+5}{2} + c$ $\frac{5}{6}\ln|3x^2-1|+c$

b f est décroissante dans $]1, 3[$,
f est croissante $]-\infty, 1[$, $]3, \infty[$

c (-1) valeur minimale absolue , (3) valeur maximale absolue

③ a $x - 6y + 18 - \frac{\pi}{4} = 0$

b 2 minute

④ a e^{-2} b 30 cm , 60 cm

⑤ a $\frac{256}{15}\pi$ unité cubique

b $a = -3$, $b = 0$

Epreuve 6

①

1	2	3	4	5	6
b	a	a	b	a	b

2 a $-\frac{7}{20}$ ln | 2 - 5x^4| + c

, $-\frac{3}{5}$ e^{-5x} +π ln |x| + c

3 a = $-\frac{1}{3}$ csc^3 x + c   b ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

4 a valeur maximale absolue = 0

valeur minimale absolue = - 5

b b = -12

5 a $\frac{3}{20}$

b $\frac{5}{2}$ unité carrée , 4 π unité cubique

Epreuve 7

1

1	2	3	4	5	6
b	a	a	b	a	b

2 a - x cos x + sin x + c , $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

b y = x - $\frac{\pi}{4}$

3 a La courbe est convexe vers le bas pour tout x∈ ℝ pas de point d'inflexion

b 6cm^3/cosec

4 a $\frac{116}{15}$ b r = $\frac{200}{\pi}$ meter

5 a **Premiérement:** valeur maximale absolue = 5 valeur minimale absolue = 1

Deuxémement: 4 unité d'aire

b 2 π unité cubique

Epreuve 8

1 a $-\frac{3}{2}$ b 7 cosec x tg x $e^{\text{cosec } x}$

c (0, 0)   d $\int_2^4 f(x)$ f x

e $\frac{32}{3}$ unité carrée

f $\frac{1}{2}$

2 a $\frac{1}{3}$ x^3 + $\frac{9}{2}$ x^2 + 27 + c

- e^{-x} [x^2 + 2x + 2] + c

b 12 x - y + 2 - 3 π = 0

3 a $\frac{13}{3}$

4 a valeur maximale absolue = 6

valeur minimale absolue = 1

b $-\frac{3}{\pi}$ m/min

5 a $\frac{4}{3}$

b **Premiérement:** 13 unité carrée

Deuxémement: 57π unité cubique

Epreuve 9

1

1	2	3	4	5	6
a	d	a	b	c	c

2 a $\frac{3}{2}$ ln |x^2 -1 |+c

e^{3x} [3x^2 -2x +$\frac{2}{3}$] + c

b 18° 26′

3 b y = 4x + 5

4 a = ($\frac{7}{100}$)^{rad}/min

b f(- 1) = 8 valeur maximale relative

, f(1) = 4 value valeur minimale relative

, (0, 6) point d'inflexion

5 a y =$\frac{1}{3}$ x + 2   b (3, 3)

c y = x   d $\frac{45}{2}$ π unité cubique

Epreuve 10

1 a e

b 6 csc^2 x (5 -2 cotg x)^2

c 3   d - 16

e zero   f $\frac{16}{15}$

2 a $-\frac{1}{3}$ ln |cos (3 x + 1)| + c

$\frac{1}{18}$ (3x - x^3)^5 + c

b **Premiérement:** 2 x - 3y - 7 = 0

Deuxémement: $\frac{1}{9}$

3 a convexe vers le haut dans] 0, 1[

convexe vers le bas dans] -∞,0 [,]1 ,∞ [

(0, 1) point d'inflexion

b b = - 48

4 a $\frac{32}{3}$ unité d'aire   b $\frac{5}{2}$ cm/c

5 a **Premiérement:** y = $\frac{1}{12}$ (x + 1) + 9

Deuxémement: ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$) point d'inflexion

b $\frac{23}{14}$ π unité cubique

تم الطبع بالشروق الحديثة ـ القاهرة
بالمواصفات الفنية الآتية

المقـــــــــاس : $\frac{1}{8}$٥٧ × ٨٢ سم

عدد الصفحـات بالغلاف : ١٧٢ صفحة

لـــــون الغلاف : ٤ لــــون

ألــوان الطبـــع : ٤ لــــون

نـــــوع الـــورق : ٨٠ جـرام

نـــــوع الغلاف: ٢٠٠ جـرام

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم
داخل جمهورية مصر العربية

الشروق
الحديثة للطباعة والتغليف
القاهرة : ٨ شارع سيبويه المصرى ـ ت : ٢٤٠٢٣٣٩٩ ـ فاكس : ٢٤٠٣٧٥٦٧ (٠٢)
مدينة العبور ـ المنطقة الصناعية